

SÉRIE E
N° D'ORDRE : 81

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

GUY ROCHE

AGREGÉ DE SCIENCES-PHYSIQUES

PREMIÈRE THÈSE

IMPORTANCE DE LA CORRECTION COULOMBIENNE DANS LE PHÉNOMÈNE
DE PRODUCTION DE PAIRES PAR DES RAYONS GAMMA DE 2 À 20 MEV

SECONDE THÈSE

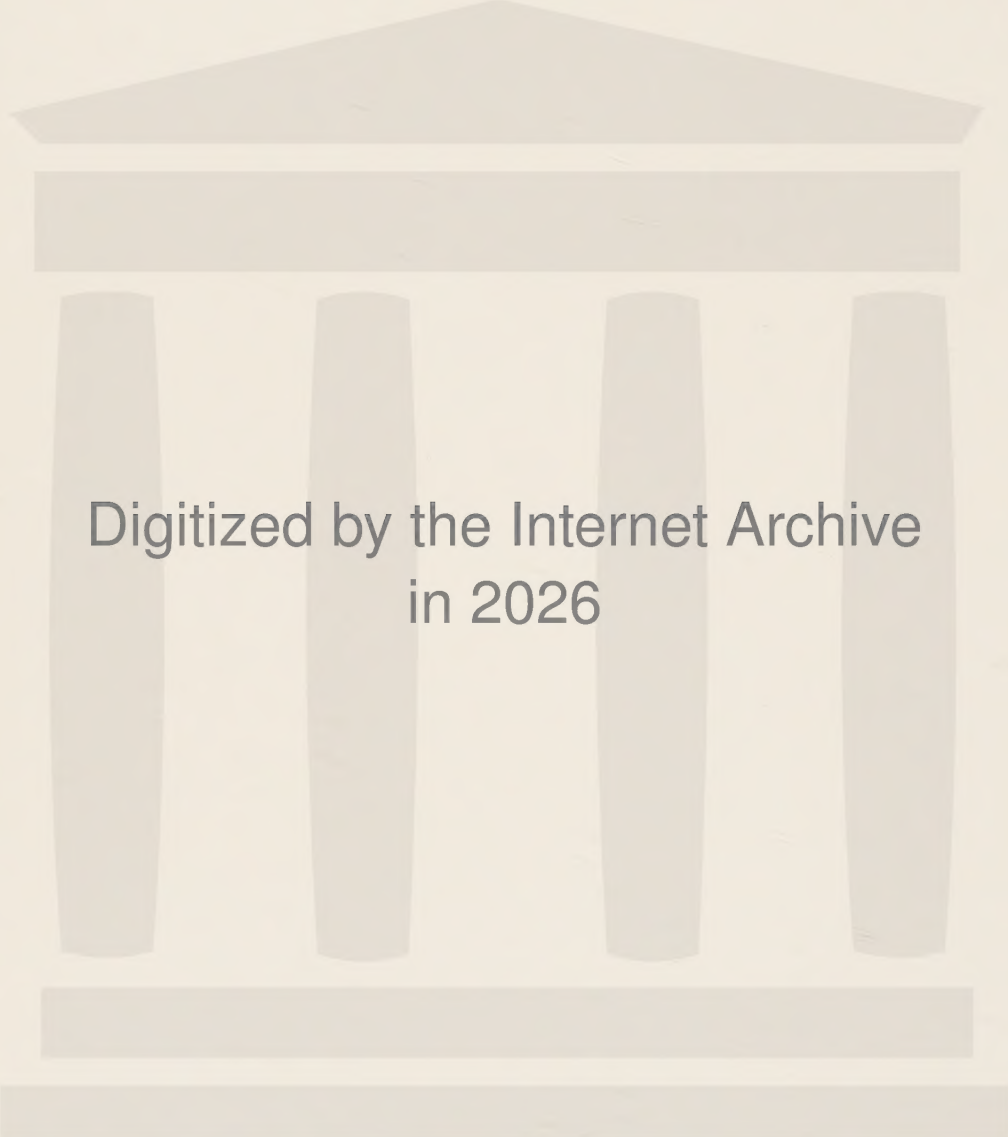
Propositions données par la Faculté

Soutenues le 3 MARS 1968, devant la Commission d'Examen

Président : M.L. LEPRINCE-RINGUET

EXAMINATEURS M.L. AVAN
Mme M. AVAN
M.D. ISABELLE

invité M.P. MAIGNAN



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546617_0021

SÉRIE E
N° D'ORDRE : 81

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

GUY ROCHE

AGREGÉ DE SCIENCES-PHYSIQUES

PREMIÈRE THÈSE

IMPORTANCE DE LA CORRECTION COULOMBIENNE DANS LE PHÉNOMÈNE
DE PRODUCTION DE PAIRES PAR DES RAYONS GAMMA DE 2 A 20 MEV

SECONDE THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 3 MARS 1968 , devant la Commission d'Examen

Président : M.L. LEPRINCE-RINGUET

EXAMINATEURS M.L. AVAN
Mme M. AVAN
M.D. ISABELLE

invité M.P. MAIGNAN

THESIS

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND

PAR

LE GÉNÉRAL BERTHOLD VON KÖNIG

DE

SAINT-ÉTIENNE

PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTEINER

LE

DIPLOME DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND



LE 14 MARS 1900

PROFESSEUR ORDINAIRE DE MATHÉMATIQUES

LE GÉNÉRAL BERTHOLD VON KÖNIG

LE 14 MARS 1900

LE GÉNÉRAL BERTHOLD VON KÖNIG

LE 14 MARS 1900

LE GÉNÉRAL BERTHOLD VON KÖNIG

PERSONNEL FACULTE des SCIENCES ANNEE SCOLAIRE 1967-1968

Doyen : M. SAUREL Jean
1er Assesseur : M. KOHLMULLER Robert
2ème Assesseur : M. RAOULT Gaston

Professeurs

M. RAMBAUD René	Chimie	T
M. BLANC Eugène	Mécanique Rationnelle	T
M. ROQUES Maurice	Géologie	T
M. LAPADU-HARGUES Pierre	Minéralogie	T
M. TRUFFAULT Robert	Chimie organique	T
M. LUTZ Hubert	Biologie animale	T
M. RAOULT Gaston	Physique	T
M. CHAMPAGNAT Paul	Physiologie Végétale	T
M. DUPLESSIS-KERGOMARD Alain	Chimie	TP
M. AVAN Louis	Physique expérimentale	T
M. PARIAUD Jean-Charles	Chimie Physique	T
Mme HENNEQUIN Françoise	Mathématiques	T
Mlle BERTHET Ginette	Physique	TP
M. LOISEAU	Botanique	T
M. COMBE René	Physique	TP
M. de PUYTORAC Pierre	Zoologie	T
Mme AVAN Madeleine	Physique	TP
Mlle DONDON Marie-Louise	Chimie physique	TP
M. DELOST Paul	Physiologie animale	TP
M. SAUREL Jean	Physique	TP
M. VIALARD André	Chimie	TP
M. KOHLMULLER Robert	Chimie Minérale	T
M. GUILLAUME Marcel	Algèbre	T
M. COMBE Jean	Physique générale	T
M. HENNEQUIN Paul-Louis	Mathématiques appliquées	T
M. L'HERITIER	Génétique	T

Professeurs sans Chaire

M. PETERLONGO Jean Marc	Géologie
M. BAILLAUD Lucien	Botanique
M. VESSIERE Roger	Chimie
M. BATHIER Marcel	Physique
Mlle DUCHER Suzanne	Chimie
M. FALGAS Maurice	Mathématiques
M. ROCHE Jean-Etienne	Physique
M. MARTINET Pierre	Chimie
M. MAISONNEUVE Jacques	Géologie
M. CAPESTAN Michel	Chimie
M. LENOIR Marcel	Mathématiques
M. THOMAS Jean	Physique

MAITRES de Conférences

M. BERNARD Maurice	Physique
M. JOYON Louis	Zoologie
M. ISABELLE Didier	Physique
M. CAUBERE Paul	Chimie
M. SOULAGE René	Géophysique Générale
M. DUFAURE Jean-Paul	Biologie animale
M. COURDUREUX Jean-Claude	Zoologie
M. ARIBAUD François	Mathématiques

Chargés d'enseignement

M. CHADEYRAS Marcel	Mathématiques
M. BADRIKIAN Albert	Mathématiques
Mme BESSERRE Anne Marie	Mathématiques
M. BOILLAT Guy	Mathématiques
M. LE THANH Phong	Mathématiques
M. JEAN Claude	Physiologie animale

Attachée Principale

Mme CHOPART Marie-Louise

Je remercie Monsieur le Professeur L. LEPRINCE-RINGUET, Professeur à l'Ecole Polytechnique et au Collège de France, de l'honneur qu'il me fait aujourd'hui en acceptant la présidence de ce Jury de Thèse.

Monsieur le Professeur L. AVAN m'a accueilli au Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences de Clermont où il m'a prodigué sans cesse aide et encouragement dans la réalisation et la rédaction de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde et respectueuse reconnaissance.

Madame le Professeur M. AVAN et Monsieur le Professeur D. ISABELLE m'ont judicieusement conseillé dans la réalisation des expériences et ont relu attentivement le manuscrit. Je leur exprime toute ma gratitude.

Je remercie,

Le Haut-Commissariat à l'Energie Atomique, Direction des Applications Militaires, Messieurs JACQUESSON et LEUBA, Ingénieurs au Centre d'Etudes Nucléaires d'Arpajon, pour leur aide efficace (Contrats DAM 1228-R), Monsieur P. MAIGNAN, Docteur ès-Sciences, Ingénieur au C.E.N. d'Arpajon, qui a accepté de faire partie du Jury, pour une discussion fructueuse au cours de la lecture du manuscrit,

Le Docteur DICK, pour un stage efficace dans son Groupe de Chercheurs, A. CORDAILLAT, Ingénieur de la Collaboration Française, ainsi que le Service de Calcul du C.E.R.N., qui ont permis la réalisation des programmes les plus difficiles,

Mes Camarades de Laboratoire, et en particulier mes co-équipiers, M. PRADOUX, J. FARGEIX, R. CHABROLLES, H. BLACHE, J.C. RASTOIX, R. MATHIS, H. MEUNIER, M^{le} PARIZET, Ch. ROQUES, pour leur aide amicale au cours de quatre années de travail,

Les Ingénieurs et les Techniciens des Centres d'Etudes Nucléaires d'Arpajon (Service de Physique Expérimentale) et de

Limeil (Accélérateur Linéaire d'Electrons) qui ont permis la mise au point et la réalisation de l'expérience avec Rayonnement de freinage,

Le Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Clermont que dirige Monsieur le Professeur P.L. HENNEQUIN, pour la mise au point et la réalisation de certains calculs numériques,

Monsieur le Professeur J. COMBE et le Dr L.C. MAXIMON pour des discussions intéressantes,

Que tous reçoivent le témoignage de ma profonde reconnaissance.

A mes Parents

A ma Femme

A mon Fils

<i>INTRODUCTION</i>	1
Notations et abréviations principales utilisées	4
<i>PREMIERE PARTIE. DONNEES THEORIQUES</i>	6
Chapitre I - Rappels	
1. Calcul des probabilités de transition et des sections efficaces	8
2. Calcul de la section efficace de matérialisation	9
3. La section efficace différentielle de Bethe-Heitler	11
4. Limites de validité de la section efficace différentielle de Bethe-Heitler	13
Chapitre II - Méthode et résultats de Bethe et Maximon	16
1. Les calculs hors de l'approximation de Born	16
2. Solution de l'équation de Dirac avec potentiel coulombien	17
3. Les éléments de matrice de Bethe-Maximon	20
4. La section efficace différentielle de Bethe-Maximon	22
Chapitre III - Termes correctifs à la section efficace différentielle de Bethe-Maximon	24
1. Calcul des éléments de matrice complémentaires $M_{2a,1e}$, $M_{2b,1b}$ et $M_{2e,1a}$	25
2. Termes de section efficace associés aux éléments de matrice complémentaires	28
3. Les approximations dans le calcul des termes correctifs	32
Chapitre IV - Etude numérique des différentes formules de section efficace	33
1. Intégrations angulaires	33
2. Comparaison des sections efficaces intégrées sur les angles. Domaines de validité des différentes formules	36
3. Conclusion de la partie théorique	39
Appendice A - Calculs d'intégrales	41
Appendice B - Sommations sur les spins des électrons et la polarisation du photon	43
Appendice C - Construction du programme pour le calcul de σ_{BM}	46
Appendice D - Intégrations angulaires	49

<i>DEUXIEME PARTIE. ETUDE EXPERIMENTALE</i>	53
Chapitre V - Dispositif expérimental	55
1. L'électronique rapide	56
2. L'électronique lente	58
3. Etalonnage de la voie "anthracène"	59
4. La géométrie de la cible	61
Chapitre VI - Expérience avec les rayons γ monochromatiques de 2,62 MeV	62
1. Le faisceau γ	62
2. L'expérience test	63
3. La conduite des mesures	63
Chapitre VII - Expérience avec le faisceau de rayonnement de freinage	67
1. Obtention du faisceau de photons	67
2. La conduite des mesures	69
Chapitre VIII - Traitement des résultats expérimentaux	73
1. Résolution de l'équation intégrale (2.1)	74
2. Correction de dérive	77
3. Correction de résolution	79
4. Correction d'autoabsorption dans les cibles	81
5. La normalisation des spectres expérimentaux de négatons	86
6. Résultats expérimentaux corrigés	89
 <i>CONCLUSION</i>	
1. Efficacité relative de détection des paires	90
2. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux	92
3. Section efficace totale	94
4. En résumé	96
Bibliographie	99
<i>Errata</i>	102

INTRODUCTION

Cependant, certaines sections efficaces sont encore mal connues, tant du point de vue théorique qu'expérimental. En effet, d'une part les approximations utilisées généralement dans les calculs ne sont pas toujours valables ; d'autre part, les expériences sont parfois difficiles. Nous mentionnerons plus particulièrement les problèmes suivants :

- la Production de Paire dans le domaine des énergies intermédiaires (quelques MeV à quelques dizaines de MeV) dans le cas où l'Approximation de Born n'est pas valable ;
- les sections efficaces de Production de Paire à grand angle, à toutes énergies et tous Z (Z = numéro atomique du noyau cible) ; les publications (9,10,11,12,13,14,15) signalent de grands écarts entre théorie et expérience ;
- la Production de Paire par des rayons γ polarisés : on trouve d'assez nombreux calculs théoriques^(16,17,18,19), mais peu ou pas de résultats expérimentaux car il est difficile d'obtenir des faisceaux intenses de photons polarisés. Arutyunyan et Tumanyan⁽²⁰⁾ présentent une étude générale du problème.

La Production de Paire dans le champ de l'électron est également assez mal connue. Cette interaction présente de plus un caractère particulier intéressant que l'on ne trouve pas dans la Matérialisation dans le champ d'un noyau : c'est l'effet d'échange entre l'électron cible et les électrons de la paire.

Le travail que nous présentons concerne le premier problème évoqué : Production de Paire dans le champ d'un noyau, dans le domaine des énergies de photons intermédiaires(quelques MeV à quelques dizaines de MeV), dans le cas où l'Approximation de Born n'est pas valable.

Les sections efficaces valables dans l'Approximation de Born ont été obtenues en 1934 par Bethe et Heitler⁽²¹⁾. Nous rappellerons leurs résultats.

Hors de l'Approximation de Born, les sections efficaces ont été calculées principalement par Jaeger et Hulme⁽²²⁾ près du seuil et par Bethe et Maximon⁽²³⁾ dans le cas ultrarelativiste. Dans le domaine des énergies intermédiaires, il n'existe pas de calcul rigoureux. Nous donnerons la méthode de Bethe et Maximon et nous introduirons dans les calculs les termes

les plus importantes qu'ils ont négligés. Dans un but de simplification, nous ne considérerons que la Correction Coulombienne : l'Effet d'Ecran des électrons atomiques est supposé faible, ce qui est pratiquement valable dans le domaine qui nous concerne.

Du point de vue expérimental, nous nous attacherons principalement à l'étude de la répartition et de la divergence énergétiques du positon et du négaton. Nous utiliserons un spectromètre à paires du type "cible externe", suivant la méthode généralement employée à haute énergie, mais non à basse énergie. Les conditions de détection imposent à l'énergie cinétique du positon la limite : $T_1 \lesssim 3 \text{ MeV}$, si bien que l'Effet d'Ecran est pratiquement négligeable, même pour Z élevé, quelle que soit l'énergie k du photon.

Etant donné la réciprocité des phénomènes "Production de Paire" et "Rayonnement de Freinage", le problème de la matérialisation des photons dans le cas de grande divergence énergétique, l'énergie du positon étant très inférieure à l'énergie du négaton, est analogue au problème de la limite haute fréquence du spectre de Rayonnement de Freinage, problème étudié récemment^(24,25,26,27) et non encore totalement résolu.

Nous considérons uniquement le cas de la matérialisation dans le champ du noyau. Toutefois, par mesure de simplification, nous écrirons toujours dans le texte "Matérialisation" ou "Production de Paire", sans préciser "dans le champ du noyau".

Notre étude a été subventionnée par le Commissariat à l'Energie Atomique, contrat DAM n° 1228-R. Elle peut conduire à une utilisation en spectrométrie γ du détecteur étudié et réalisé dans le cadre de nos expériences.

NOTATIONS ET ABBREVIATIONS PRINCIPALES UTILISEES

A quelques exceptions près, on utilise un système d'unité où :
 $\hbar = c = m = 1$, $e^2 = 1/137$, avec :

$\hbar = h/2\pi$; h = constante de Planck ;

c = vitesse de la lumière dans le vide ;

m = masse au repos de l'électron ;

e = valeur absolue de la charge de l'électron ($\alpha = 1/137$ = constante de structure fine).

Dans ce système, les énergies sont exprimées en unité mc^2 , les quantités de mouvement en unité mc , les vitesses en unité c et les sections efficaces en unité $(r_0/\alpha)^2$, r_0 étant le rayon classique de l'électron. On a de plus $4\pi\epsilon_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} = 1$, où ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide. Le tableau 1 donne les valeurs numériques des facteurs de conversion nécessaires pour utiliser nos formules de section efficace.

En général, E , T , $\vec{p}$, $\vec{v}$ désignent l'énergie totale, l'énergie cinétique, la quantité de mouvement, la vitesse d'une particule :

négaton : E_2 , T_2 , $\vec{p}_2$, $\vec{v}_2$;

positon : E_1 , T_1 , $\vec{p}_1$, $\vec{v}_1$;

noyau cible : E_N , $\vec{q}$ (on utilise $\vec{q}$, notation consacrée par l'usage, plutôt que $\vec{p}_N$).

Pour le photon : k = énergie, $\vec{k}$ = quantité de mouvement.

Grandeurs relatives à la cible :

Z = numéro atomique ;

A = masse atomique ;

ρ = masse volumique ;

l = épaisseur .

L'axe de coordonnée Oz est pris suivant $\vec{k}$, l'axe Ox suivant $\vec{e}$ ($\vec{e}$ = vecteur polarisation du photon).

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \text{angle } \vec{p}_1, \vec{k} \\
 \theta_2 &= \text{" } \vec{p}_2, \vec{k} \\
 \phi_1 &= \text{angle des plans définis par } \vec{k}, \vec{p}_1 \text{ et } \vec{k}, \vec{Ox} \\
 \phi_2 &= \text{" } \text{" } \text{" } \text{" } \text{" } \vec{k}, \vec{p}_2 \text{ et } \vec{k}, \vec{Ox} \\
 \phi &= \phi_1 - \phi_2 = \text{angle des plans définis par } \vec{k}, \vec{p}_1 \text{ et } \vec{k}, \vec{p}_2 \\
 p_{1\perp} &= p_1 \sin \theta_1 \quad ; \quad p_{2\perp} = p_2 \sin \theta_2 \\
 D_1 &= 2k (E_1 - p_{1z}) \quad ; \quad D_2 = 2k (E_2 - p_{2z}) \\
 a &= Z/137 \quad ; \quad a_1 = a \cdot E_1/p_1 \quad ; \quad a_2 = a \cdot E_2/p_2
 \end{aligned}$$

En général, $d\sigma$ est la section efficace différentielle en E_1 , θ_1 , θ_2 et ϕ ; σ est la section efficace différentielle en E_1 seul ; les sections efficaces primées $d\sigma'$ et σ' sont valables dans le cas ultrarelativiste.

Autres notations :

$\vec{\alpha}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, β = matrices de Dirac ;
 $\vec{r}$ = vecteur coordonnée du point courant (ou de la particule) ;
 $d\tau$ = élément de volume de l'espace de configuration ;
 t = temps ;
 RF = rayonnement de Freinage ;
 Δ = intervalle d'énergie ;
 PM = photomultiplicateur.

Tableau 1 : valeurs numériques des facteurs de conversion pour l'utilisation des formules de section efficace.

Grandeur	Facteur de conversion	Valeur numérique en unité usuelle
Energie	mc^2	0,511 MeV
Quantité de mouvement	mc	$0,511 \text{ MeV} \cdot c^{-1}$
Section efficace	$(r_0/\alpha)^2$	$1490 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 1490 \text{ barns}$

PREMIERE PARTIE

DONNEES THEORIQUES

Figure 1.1

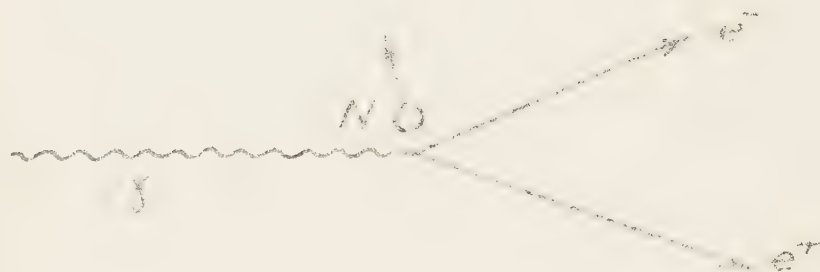
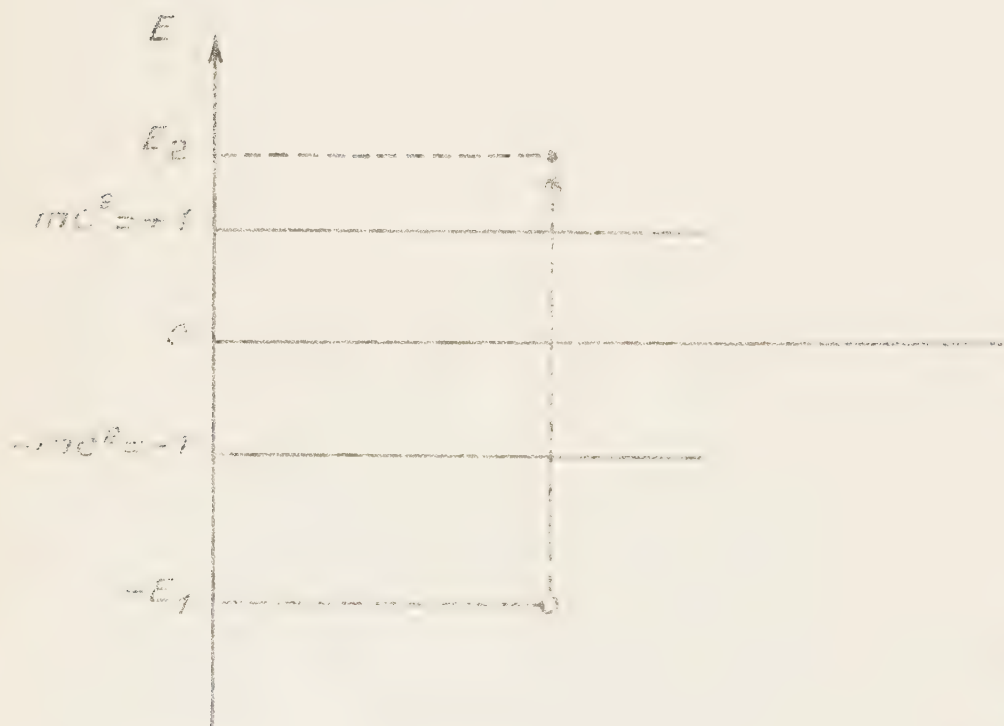


Figure 1.2



Lorsqu'un photon γ passe dans le champ d'un noyau atomique, il peut se matérialiser en donnant naissance à deux électrons, positon e^+ et négaton e^- (Figure 1.1) :

$$\gamma (+ N) \rightarrow e^+ + e^- (+ N)$$

La présence du noyau N est nécessaire pour assurer la conservation de la quantité de mouvement.

L'interprétation la plus simple se fait dans la théorie des trous de Dirac (Figure 1.2). L'énergie apportée par le photon γ induit la transition d'un électron ordinaire de l'état d'énergie négative $-E_1$ à l'état d'énergie positive E_2 . La conservation de l'énergie donne :

$$k = E_1 + E_2 \quad (1.1)$$

l'interaction n'est possible qu'à la condition $k \geq 2$. La vacance dans les états d'énergie négative se comporte comme un électron d'énergie positive E_1 et de charge positive $+e$. On se trouve en présence d'une paire négaton-positon dont le seuil de création est 1,02 MeV.

La conservation de la quantité de mouvement impose la présence d'une troisième particule : c'est ici le noyau. On a :

$$\vec{k} = \vec{q} + \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (1.2)$$

Du fait de la présence du noyau, la conservation de l'énergie s'écrit en toute rigueur :

$$k = E_1 + E_2 + E_N$$

mais dans notre cas E_N (énergie de **recul** du noyau) est négligeable et on a bien la relation (1.1).

Le calcul de la section efficace d'interaction se fait dans le cadre de l'Electrodynamique quantique. Deux formalismes existent : Hamiltonien et Lagrangien.

Le formalisme Lagrangien (ou formalisme de Feynman) est le plus récent⁽²⁸⁾ ; il est actuellement très utilisé par les théoriciens. Toutefois, les premiers calculs de section efficace de Production de Paire de Bethe et Heitler⁽²¹⁾, ainsi que les calculs de Bethe et Maximon⁽²³⁾, ont été développés à l'aide du formalisme Hamiltonien. Comme la théorie de Bethe et Maximon est le point de départ du calcul des termes d'ordre supérieur que nous introduisons, nous utiliserons pour simplifier le formalisme Hamiltonien.

CHAPITRE I

RAPPELS

Bibliographie générale : Heitler, The Quantum Theory of Radiation⁽²⁹⁾ ; Messiah, Mécanique quantique, Tome II⁽³⁰⁾.

1. Calcul des probabilités de transition et des sections efficaces

Soit H l'opérateur Hamiltonien d'un système de photons et d'électrons (ou de particules) en interaction. Nous avons :

$$H = H_{\text{rad}} + H_{\text{el}} + H_{\text{int}} \quad (1.3)$$

avec H_{rad} , H_{el} = Hamiltoniens relatifs aux photons et aux électrons libres ;

H_{int} = Hamiltonien introduit par l'interaction.

Le vecteur d'état ψ décrivant un état général du système satisfait à l'équation de Schrödinger :

$$i \psi = H \psi \quad (1.4)$$

Le calcul des probabilités de transition et des sections efficaces se fait par la méthode des perturbations, la perturbation étant introduite par H_{int} .

Considérons la transition $O \rightarrow F$, où O désigne l'état initial et F l'état final, décrits par les vecteurs ψ_O et ψ_F . Dans le cas où le nombre de photons ne varie que d'une unité, la probabilité de transition (par unité de temps) est :

$$\omega_F |O| = 2 \pi \cdot \rho_F \cdot |\langle \psi_F | H_{\text{int}} | \psi_O \rangle|^2 \quad (1.5)$$

avec ρ_F = densité des états d'énergie E_F .

S'il y a plus d'un photon échangé, la première approximation précédente donne une probabilité de transition nulle. On doit calculer un terme d'ordre supérieur. Pour cela, on introduit un état intermédiaire I ou état virtuel ; la transition $O \rightarrow F$ est décomposée en $O \xrightarrow{(H1)} I \xrightarrow{(H2)} F$ de telle façon qu'il y ait chaque fois échange d'un seul photon. La conservation de l'énergie n'est pas exigée pour les états virtuels. On est ramené au problème précédent en remplaçant dans (1.5) l'élément de matrice simple par l'élément de matrice composé :

$$\sum \frac{\langle \psi_F | H_2 | \psi_I \rangle \cdot \langle \psi_I | H_1 | \psi_O \rangle}{E_O - E_I} \quad (1.6)$$

la sommation étant effectuée sur les états de spin et d'énergie intermédiaires.

Si la probabilité de transition est encore nulle, on peut calculer un ordre supérieur où trois photons sont échangés. La première approximation (1 photon échangé) est appelée première approximation de Born, elle donne une probabilité de transition proportionnelle à e^2 car H_{int} est proportionnel à e ; la deuxième (2 photons échangés) est proportionnelle à e^4 ; etc ...

On obtient la section efficace d'interaction à partir de la probabilité de transition. Pour cela, on considère deux particules enformées dans un volume L^3 . Soit v la vitesse relative de la particule incidente par rapport à la particule cible. La probabilité d'interaction par unité de temps est égale à $\frac{\sigma \cdot v}{L^3}$ (par définition même de la section efficace σ). On peut d'ailleurs prendre $L^3 = 1$ car L^3 s'élimine dans les formules et on a :

$$\sigma_{F|O} = \frac{\omega_F |O|}{N} = \frac{2 \pi}{v} \cdot \rho_F \cdot |\langle \psi_F | H_{int} | \psi_O \rangle|^2 \quad (1.7)$$

2. Calcul de la section efficace de matérialisation

Nous devons calculer l'élément de matrice $\langle \psi_F | H_{int} | \psi_O \rangle$ pour la transition :

$O(1 \text{ électron dans l'état } - E_1, 1 \text{ photon } k) \rightarrow F(1 \text{ électron dans l'état } E_2, \text{ noyau de recul } \vec{q})$.

Deux cas sont à considérer suivant que l'énergie potentielle $V = -Ze^2/r$ est incluse dans H_0 ou H_{int} , H_0 étant l'Hamiltonien non perturbé et r la distance électron-noyau :

a) V inclus dans H_0 . Interaction "liée"

$$\langle \psi_F | H_{int} | \psi_0 \rangle = - e \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \cdot \int \psi_2^*(\vec{\alpha}, \vec{e}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \psi_1 d\tau \quad (1.8)$$

où ψ_1 et ψ_2 sont solutions de l'équation de Dirac avec potentiel coulombien.

b) V inclus dans H_{int} . Interaction "libre"

$$H_{int} = H_1 + V \quad (1.9)$$

Le terme H_1 correspond à l'absorption du photon, le terme V à la diffusion d'un électron par le noyau. Les fonctions d'onde des électrons sont des ondes planes. L'élément de matrice pour une transition $n \rightarrow m$ induite par H_1 a la forme générale :

$$\langle \psi_m | H_1 | \psi_n \rangle = - e \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \cdot \langle u_m | \vec{\alpha} \cdot \vec{e} | u_n \rangle \quad (1.10)$$

où u_n et u_m sont les spineurs de Dirac de l'électron libre dans les états n et m . Pour la diffusion :

$$\langle \psi_m | V | \psi_n \rangle = - \frac{4\pi Ze^2}{q^2} \cdot \langle u_m | u_n \rangle \quad (1.11)$$

$$\text{Posons } \langle \psi_F | H_{int} | \psi_0 \rangle = - e \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \cdot M \quad (1.12)$$

La section efficace cherchée s'obtient alors à partir de (1.7) avec $v = c = 1$.

$$\sigma_F|_0 = 2\pi \cdot \rho_F \cdot \frac{2\pi e^2}{k} \cdot |M|^2 \quad (1.13)$$

La densité d'état final est donnée par :

$$\rho_F = \frac{p_1 E_1 \cdot d\Omega_1 \cdot p_2 E_2 d\Omega_2}{(2\pi)^6} \cdot dE_1 \quad (1.14)$$

avec $d\Omega_i = 2\pi \sin\theta_i \cdot d\theta_i \cdot d\phi_i$; $i = 1, 2$.

Posant : $\phi = \phi_1 - \phi_2$ et intégrant sur ϕ_2 , on obtient :

$$d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 = 2\pi \sin\theta_1 \cdot d\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot d\theta_2 \cdot d\phi \quad (1.15)$$

Reportant (1.15) et (1.14) dans (1.13), nous obtenons :

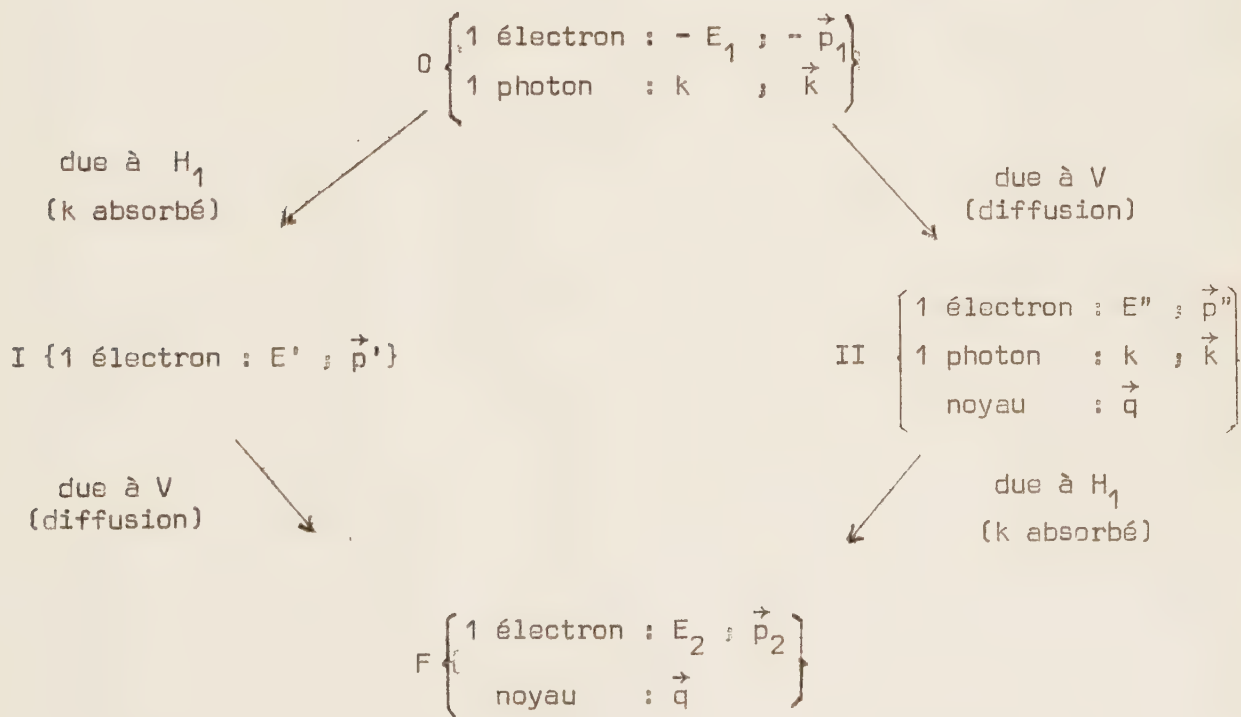
$$\sigma_F|_0 = dE_1 d\theta_1 d\theta_2 d\phi \cdot \frac{e^2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{p_{1\perp} p_{2\perp}}{k} E_1 E_2 |M|^2 \quad (1.16)$$

avec $p_{1\perp} = p_1 \sin \theta_1$ et $p_{2\perp} = p_2 \sin \theta_2$.

La section efficace (1.16) est fonction des spins des électrons et de la polarisation du photon. Il reste à sommer sur l'état final et à faire la moyenne sur l'état initial.

3. La section efficace différentielle de Bethe-Heitler

On se place dans le cadre de l'interaction libre. Du fait de la présence de deux termes dans H_{int} (1.9), la transition globale $0 \rightarrow F$ peut se faire en suivant deux voies, d'où la présence de deux états intermédiaires I et II. On a :

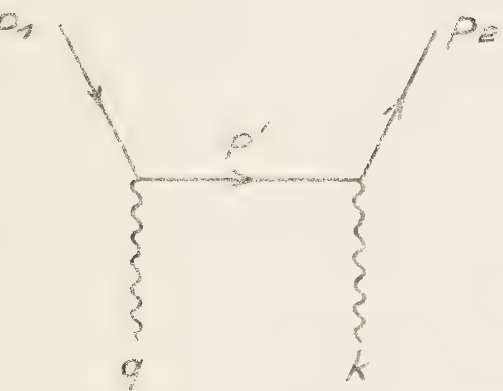


$$\text{avec : } E_0 - E_I = k - E_1 - E' = E_2 - E' ; E' = \pm \sqrt{p'^2 + 1} \quad (1.17)$$

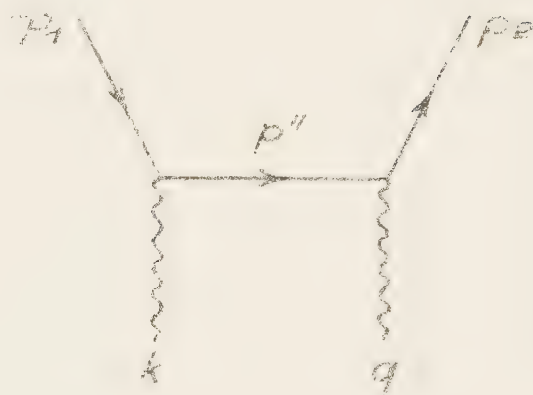
$$E_0 - E_{II} = k - E_1 - k - E'' = -E_1 - E'' ; E'' = \pm \sqrt{p''^2 + 1}$$

$$\text{et : } \left. \begin{array}{l} \vec{p}' = \vec{k} - \vec{p}_1 = \vec{q} + \vec{p}_2 \\ \vec{p}'' = -\vec{q} - \vec{p}_1 = -\vec{k} + \vec{p}_2 \end{array} \right\} \quad (\text{conservation de l'impulsion})$$

Figure 1.3.



1.3.a



1.3.b

Les états intermédiaires correspondent aux diagrammes de Feynman de la Figure 1.3. Dans le cas (a), la diffusion par le potentiel Coulombien s'applique au positon ; elle s'applique au négaton dans le cas (b).

Nous devons faire intervenir quatre éléments de matrice. D'après les formules générales (1.10) et (1.11), on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \psi_I | H_1 | \psi_0 \rangle &= -e \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \cdot \langle u' | \alpha_e | u_1 \rangle ; \quad \langle \psi_F | V | \psi_I \rangle = -\frac{4\pi Ze^2}{q^2} \cdot \langle u_2 | u' \rangle \\ \langle \psi_{II} | V | \psi_0 \rangle &= -\frac{4\pi Ze^2}{q^2} \cdot \langle u'' | u_1 \rangle ; \quad \langle \psi_F | V | \psi_{II} \rangle = -e \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u'' \rangle \end{aligned} \quad (1.18)$$

où u_2 , u' , u'' et u_1 sont les spineurs relatifs à l'électron dans les états F, I, II, 0 respectivement, et $\alpha_e = \vec{\alpha} \cdot \vec{e}$. Chaque état intermédiaire est quadruple ; nous devons donc sommer sur tous ces états. L'élément de matrice M pour la transition $0 \rightarrow F$, compte tenu de (1.12), (1.6), (1.17) et (1.18) s'écrit donc :

$$M = -\frac{4\pi Ze^2}{q^2} \sum \left[\frac{\langle u_2 | u' \rangle \cdot \langle u' | \alpha_e | u_1 \rangle}{E_2 - E'} - \frac{\langle u_2 | \alpha_e | u'' \rangle \cdot \langle u'' | u_1 \rangle}{E_1 + E''} \right] \quad (1.19)$$

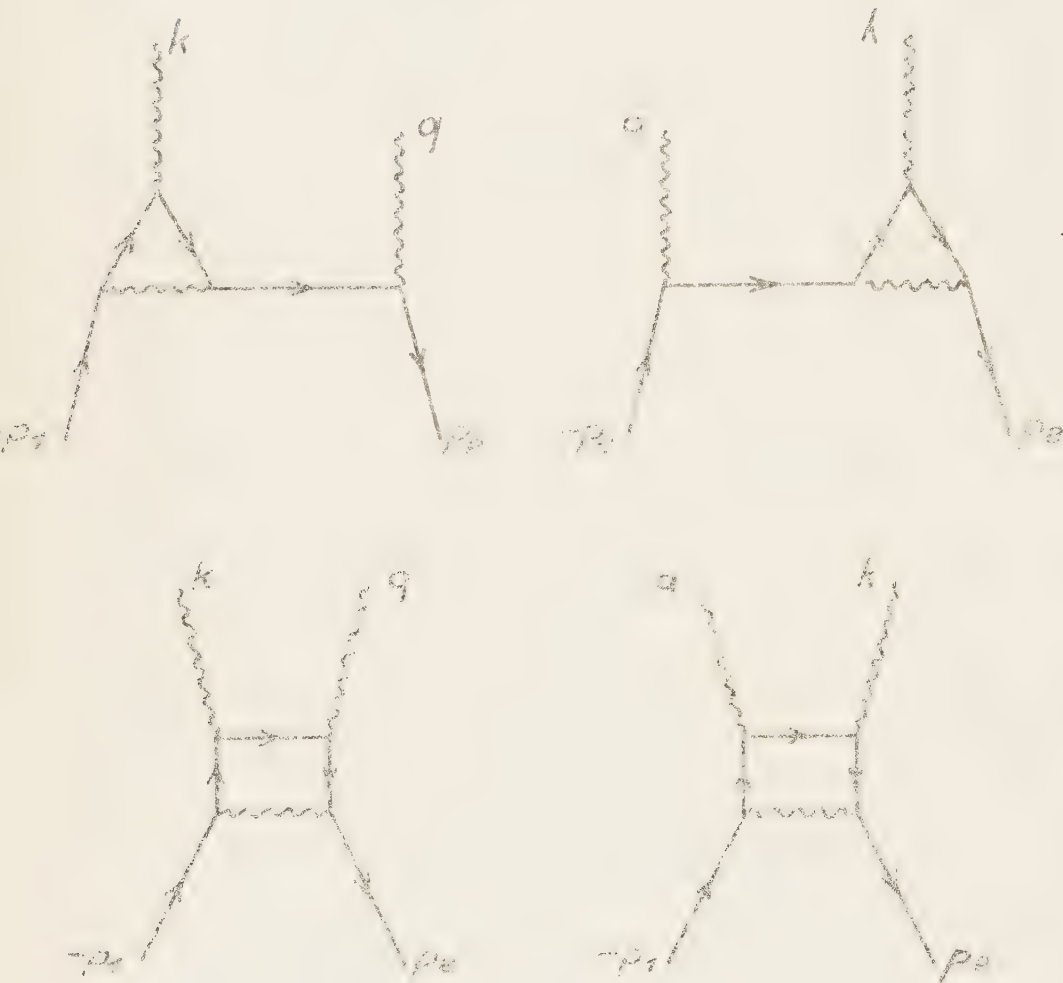
La somme doit être prise sur les quatre états de spin et d'énergie des états intermédiaires.

A partir de (1.16) et (1.19), Bethe et Heitler obtiennent, après les sommations supplémentaires sur les états final et initial, la section efficace $d\sigma_{BH}$ de production d'une paire par un photon d'énergie k (notations p.4 et 5).

$$d\sigma_{BH} = -dE_1 d\theta_1 d\theta_2 d\phi \frac{2 Z^2 e^6}{\pi} \frac{p_{1\perp}^2 p_{2\perp}^2}{k q^4} \quad (1.20)$$

$$\cdot \left\{ \frac{p_{1\perp}^2}{D_1^2} (4 E_2^2 - q^2) + \frac{p_{2\perp}^2}{D_2^2} (4 E_1^2 - q^2) + \frac{2}{D_1 D_2} \left[p_{1\perp} p_{2\perp} \cos \phi (4 E_1 E_2 + q^2 - 2 k^2) - k^2 (p_{1\perp}^2 + p_{2\perp}^2) \right] \right\}$$

Figure 1.4



4. Limites de validité de la section efficace différentielle de Bethe-Heitler

La formule (1.20) est obtenue en faisant au départ certaines approximations :

- H_1 est considéré comme une perturbation et on se limite au 1er ordre. Le calcul des termes d'ordre supérieur entre dans le cadre des corrections radiatives (plusieurs photons réels ou virtuels mis en jeu).
- En interaction libre, V est traité comme une perturbation. C'est l'approximation de Born. L'électron y est représenté par une onde plane. Le calcul de la section efficace lorsque l'approximation de Born n'est pas valable entre dans le cadre de l'interaction liée.

La différence entre les résultats obtenus en interaction liée et en interaction libre est appelée "Correction Coulombienne".

- Aussi bien en interaction libre qu'en interaction liée, nous supposons le potentiel V créé par le noyau seul, ce qui revient à négliger l'influence des électrons atomiques. La modification du potentiel V par les électrons atomiques constitue l'effet d'écran.

Les calculs théoriques de production de paire font donc intervenir trois sortes de corrections : correction coulombienne, correction d'effet d'écran, correction radiative. Dans le domaine d'énergie où nous nous plaçons, la correction coulombienne est la plus importante.

a) Corrections radiatives

Au sujet du calcul des perturbations, nous avons rappelé p. 9 que la section efficace du 1er ordre est en e^2 , celle du 2ème ordre en e^4 , etc ... L'erreur relative commise en négligeant un ordre supérieur par rapport au précédent est donc en $e^2 \sim 1\%$.

Des calculs de corrections radiatives ont été faits par Vekshtein⁽³¹⁾ et par Mork et Olsen⁽³²⁾. Vekshtein considère, outre les diagrammes de Feynman donnés précédemment (Figure 1.3), les diagrammes de la Figure 1.4. Il montre que pour $\theta_1 = \theta_2 = 1/k$, la correction relative est proportionnelle à $e^2 k^2$. Il calcule également l'étendue angulaire et énergétique de cette région de correction radiative anormalement grande.

Mork et Olsen déduisent les résultats relatifs à la production de paire (ou au rayonnement de freinage) de ceux connus relatifs à l'effet

Compton⁽³³⁾ (méthode de Weizsäcker et Williams). Ils trouvent qu'à haute énergie la correction radiative à la section efficace $\sigma(E_1)$ est indépendante de l'énergie du photon et du numéro atomique du noyau. La correction radiative est mise sous la forme : $\sigma_{\text{corrigé}} = \sigma(1 + \delta^P)$, la correction coulombienne et la correction d'effet d'écran étant incluses dans σ ; numériquement, δ^P est de l'ordre de 1 ou 2 %.

b) L'approximation de Born

Il faut que $|V| = Ze^2/r$ soit faible pour qu'on puisse le traiter comme une perturbation. Nous savons que le paramètre d'impact r varie comme l'énergie des particules qui interviennent dans la diffusion ; il résulte que l'approximation est meilleure à énergie élevée et Z faible.

Des considérations plus rigoureuses (Schiff⁽³⁴⁾ ; Messiah⁽³⁰⁾ p.701) conduisent à la condition de validité :

$$Ze^2/v \ll 1 \quad (1.21)$$

Les énergies les plus faibles que nous envisageons expérimentalement sont : $T \sim 0,25$ MeV, soit : $E \sim 1,5$, d'où : $v = 1 - 1/E^2 \sim 0,6$. Pour que l'approximation de Born soit valable jusqu'à ces énergies, il faut : $Z \ll 80$, ce qui est pratiquement vérifié pour l'aluminium ($Z = 13$), mais non pour l'or ($Z = 79$). Nous admettrons que pour l'aluminium, l'approximation de Born est toujours valable.

Pour les électrons, v tend rapidement vers 1 dès que l'énergie augmente. Pour $T = 0,5$ MeV, soit $E \approx 2$, $v \approx 0,75$ et pour $T = 1$ MeV, soit $E \approx 3$, $v \approx 0,9$. Donc, au-dessus de 1 MeV (pratiquement), la condition (1.21) se réduit à : $Z \ll 137$, condition mal vérifiée pour des éléments tels que l'or. Pour ces éléments, l'approximation de Born n'est jamais valable.

c) Influence des électrons atomiques. Effet d'écran

L'effet d'écran est négligeable si le paramètre d'impact est très inférieur au rayon de l'atome, condition d'autant mieux vérifiée que E et Z sont faibles. La condition rigoureuse est⁽²⁹⁾ :

$$\delta = k/2 E_1 E_2 \gg Z^{1/3} \cdot e^2 \quad (1.22)$$

Si k est fixé, δ est minimum à l'équipartition ($E_1 = E_2 = k/2$), donc : $\delta \geq 2/k$. On a : $Z^{1/3}/137 = 0,017$ pour l'aluminium et 0,031 pour l'or. On peut donc négliger l'effet d'écran, quelle que soit la divergence énergétique,

dans le cas de l'aluminium jusqu'à $k \sim 30$ (soit 15 MeV) et dans le cas de l'or, jusqu'à $k \sim 20$ (soit 10 MeV).

S'il y a forte divergence énergétique, avec par exemple $E_1 \ll E_2$ et $E_2 \sim k$, on a : $\delta \sim 1/2 E_1$, et on peut négliger l'effet d'écran jusqu'à $E_1 \lesssim 5$, $T_1 \lesssim 2$ MeV, quel que soit Z .

Notre étude expérimentale porte sur la validité de l'approximation de Born. Nous éliminons la complication de l'effet d'écran en nous limitant à $T_1 \lesssim 2$ MeV de telle façon que la condition (1.22) soit vérifiée pratiquement quels que soient Z et k . Les calculs théoriques qui suivent ne tiennent donc pas compte de l'effet d'écran.

Remarque - La présence des électrons atomiques se manifeste aussi par le phénomène de matérialisation dans le champ de l'électron (triplet). Expérimentalement, notre technique ne permet pas de dissocier paires et triplets. Dans le cas où l'effet d'écran est complet, le rapport entre les sections efficaces des deux phénomènes peut se mettre sous la forme :

$\sigma_{\text{triplet}}/\sigma_{\text{paire}} \sim C/Z$, C étant une constante estimée à 0,7 ou 0,8. Quand l'énergie k diminue, C diminue pour s'annuler lorsque $k = 4$, seuil de production de triplet. Dans notre cas, la contribution expérimentale en triplets par rapport aux paires est certainement inférieure à $0,7/Z$, soit 5 % pour l'aluminium et 1 % pour l'or.

CHAPITRE II

METHODE ET RESULTATS DE BETHE ET MAXIMON

1. Les calculs hors de l'approximation de Born

Jaeger et Hulme⁽²²⁾ et Huck⁽⁶⁾ ont calculé numériquement la section efficace de Production de Paire hors de l'approximation de Born en utilisant la décomposition des solutions de l'équation de Dirac (1.23) suivant les harmoniques sphériques. Dans ces conditions, l'élément de matrice M de la transition -Cf (1.12) - s'exprime sous la forme d'une somme d'éléments de matrice partiels :

$$M = \sum_{l,m,l',m'} M_{l,m,l',m'}$$

où les nombres quantiques l, m, l' et m' sont introduits par les harmoniques sphériques, l et m étant relatifs à l'état final, l' et m' à l'état initial. Jaeger et Hulme ont calculé les éléments de matrice correspondant aux transitions à partir de l'état fondamental $l' = m' = 0$ et ont obtenu numériquement la section efficace totale pour $k = 3$ et $Z = 82$ et 53 . Huck a calculé numériquement la section efficace totale pour $Z = 53$ et $k = 2, 5$.

Toutefois, les calculs précédents ne sont possibles qu'à faible énergie ($k \leq 5$). En effet, le nombre quantique l peut prendre des valeurs allant jusqu'à : $l_0 = b/\lambda$, où b est le rayon atomique et λ la longueur d'onde associée à l'électron d'énergie E . On a : $l_0 \sim 137 E$, si bien que le nombre d'éléments de matrice à calculer devient très grand dès que l'énergie

augmente. L'équation (1.23) ne peut donc être résolue qu'approximativement. Mullin et Jonhson⁽²⁶⁾ utilisent la fonction de Green de l'opérateur $H - E$ pour calculer la limite haute fréquence du spectre de Rayonnement de Freinage. Moroï et Hammer⁽¹⁰⁾ avec la même méthode calculent la section efficace de matérialisation dans le cas : $E_1 \ll E_2$, $\theta_1 = 90^\circ$, $E_1 \lesssim 4$ et $k \lesssim 80$. Nous exposons la méthode proposée d'abord par Bess⁽³⁵⁾, puis reprise et développée par Bethe et Maximon⁽²³⁾ ainsi que par Olsen et Maximon⁽¹⁸⁾.

2. Solution de l'équation de Dirac avec potentiel coulombien

Nous partons de l'équation de Dirac avec potentiel coulombien :

$$(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta - \frac{a}{r} - E)\psi = 0 \quad (1.23)$$

où nous avons posé : $a = Ze^2 = Z/137$. Soit :

$$\psi = \psi_a + \psi_b + \psi_c \quad (1.24)$$

la solution exacte de (1.23), ψ_a étant le terme principal, ψ_b et ψ_c des termes correctifs. Nous prenons :

$$\psi_a = N \cdot e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \cdot u \cdot F \quad (1.25)$$

où N est une constante de normalisation, u le spineur de Dirac de l'électron libre et F la fonction hypergéométrique confluyente qui s'introduit dans la solution exacte de l'équation de Schrödinger (non relativiste) avec potentiel coulombien :

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta - E)u = 0 \quad (1.26)$$

$$(\nabla^2 + p^2 + \frac{2Ea}{r}) \cdot e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \cdot F = 0 \quad (1.27)$$

$$\text{avec :} \quad F = F(iaE/p ; 1 ; ipr - i\vec{p} \cdot \vec{r}) \quad (1.28)$$

si le comportement asymptotique est celui d'une onde plane + onde sphérique sortante,

$$\text{ou :} \quad F = F(-iaE/p ; 1 ; -ipr - i\vec{p} \cdot \vec{r}) \quad (1.29)$$

pour un comportement asymptotique onde plane + onde entrante.

Multiplions à gauche l'équation (1.23) par l'opérateur $-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta + \frac{a}{r} + E$. Utilisant les propriétés des matrices $\vec{\alpha}$, β on obtient :

$$(\nabla^2 + p^2 + \frac{2 Ea}{r}) \psi = [i a \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} (\frac{1}{r}) - \frac{a^2}{r^2}] \psi \quad (1.30)$$

(le terme $\vec{\nabla} (\frac{1}{r})$ n'agit plus sur ψ que comme terme multiplicatif). D'après (1.24), (1.25) et (1.27), (1.30) s'écrit :

$$(\nabla^2 + p^2 + \frac{2 Ea}{r})(\psi_b + \psi_c) = [i a \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} (\frac{1}{r}) - \frac{a^2}{r^2}] (\psi_a + \psi_b + \psi_c) \quad (1.31)$$

On voit que si l'on prend le 1er terme correctif ψ_b sous la forme :

$$\psi_b = -\frac{1}{2E} \cdot N \cdot e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F u \quad (1.32)$$

on a :

$$(\nabla^2 + p^2 + \frac{2 Ea}{r}) \psi_b = i a \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} (\frac{1}{r}) \cdot \psi_a$$

et l'équation (1.31) se réduit à :

$$(\nabla^2 + p^2 + \frac{2 Ea}{r}) \psi_c = i a \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} (\frac{1}{r}) \cdot (\psi_b + \psi_c) - \frac{a^2}{r^2} (\psi_a + \psi_b + \psi_c) \quad (1.33)$$

En fait, pour le calcul de la section efficace, nous n'utiliserons pas le deuxième terme correctif exact ψ_c satisfaisant (1.33), mais le terme approché ψ_e satisfaisant la relation :

$$(\nabla^2 + p^2) \psi_e = -\frac{a^2}{r^2} \cdot \psi_a \quad (1.34)$$

obtenue en négligeant des termes d'ordre $1/r^3$, ce qui est d'autant moins correct que l'énergie est faible, mais suffisant pour améliorer le domaine de validité des calculs de Bethe et Maximon (Ch. III et IV).

Bethe et Maximon montrent que pour le positon on doit prendre une fonction d'onde à comportement asymptotique onde plane + onde sortante, et pour le négaton, onde plane + onde entrante. Les fonctions d'onde qui interviennent dans l'élément de matrice (1.8) sont donc, d'après (1.25), (1.28), (1.29), (1.32) et (1.34) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{1a} = N_1 \cdot e^{-i\vec{p}_1 \cdot \vec{r}} \cdot F_1 u_1 \quad (1.35.1) \\ \psi_{1b} = \frac{iN_1}{2E_1} \cdot e^{-i\vec{p}_1 \cdot \vec{r}} \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_1 u_1 \quad (1.35.2) \\ F_1 = F(-ia_1; 1; ip_1 r + i\vec{p}_1 \cdot \vec{r}) \quad (1.35.3) \\ (\nabla^2 + p_1^2)\psi_{1e} = -\frac{a^2}{r^2} \cdot \psi_{1a} \quad (1.35.4) \\ \psi_1 \approx \psi_{1a} + \psi_{1b} + \psi_{1e} \quad (1.35.5) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{2a}^+ = N_2^* \cdot e^{-i\vec{p}_2 \cdot \vec{r}} \cdot u_2^+ F_2^* \quad (1.36.1) \\ \psi_{2b}^+ = \frac{iN_2^*}{2E_2} \cdot e^{-i\vec{p}_2 \cdot \vec{r}} \cdot u_2^+ \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_2^* \quad (1.36.2) \\ F_2^* = F(ia_2; 1; ip_2 r + i\vec{p}_2 \cdot \vec{r}) \quad (1.36.3) \\ (\nabla^2 + p_2^2)\psi_{2e}^+ = -\frac{a^2}{r^2} \cdot \psi_{2a}^+ \quad (1.36.4) \\ \psi_2^+ \approx \psi_{2a}^+ + \psi_{2b}^+ + \psi_{2e}^+ \quad (1.36.5) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{avec : } a_1 = a E_1/p_1 ; \quad a_2 = a E_2/p_2 \\ H_1 u_1 = (-\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1 + \beta) u_1 = -E_1 u_1 \\ H_2 u_2 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 + \beta) u_2 = E_2 u_2 \end{array} \right\} \quad (1.37)$$

N_1 et N_2 sont déterminés de telle façon que ψ_1 et ψ_2 soient normalisés à une amplitude asymptotique unité :

$$|N_1 N_2|^2 = \frac{\pi^2 a_1 a_2 \cdot e^{\pi(a_2 - a_1)}}{\text{sh}(\pi a_2) \cdot \text{sh}(\pi a_1)} = \frac{4 \pi^2 a_1 a_2}{(e^{2\pi a_1} - 1) \cdot (1 - e^{-2\pi a_2})} \quad (1.38)$$

Remarque - Nous verrons plus loin que l'expression (1.38) s'introduit en facteur dans les différentes formules de section efficace et contribue pour une part importante à la distorsion coulombienne. Lorsque $2\pi a_1$ ou $2\pi a_2$

est très inférieur à 1, $|N_1 N_2|^2 = 1$; on est dans l'approximation de Born. Il en résulte que certains auteurs, Heitler par exemple⁽²⁹⁾, donnent comme critère de validité de l'approximation de Born :

$$2 \pi \cdot Z e^2 / v \ll 1$$

au lieu de (1.21).

3. Les éléments de matrice de Bethe-Maximon

On écrit l'élément de matrice M, Cf (1.12) et (1.8), en utilisant (1.35.5) et (1.36.5), sous la forme :

$$\begin{aligned} M \approx & M_{2a,1a} + M_{2a,1b} + M_{2a,1e} \\ & + M_{2b,1a} + M_{2b,1b} + M_{2b,1e} \\ & + M_{2e,1a} + M_{2e,1b} + M_{2e,1e} \end{aligned} \quad (1.39)$$

avec : $M_{2a,1a} = \int \psi_{2a}^+ \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{e}) \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \psi_{1a} \, d\tau$

$$M_{2a,1b} = \int \psi_{2a}^+ \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{e}) \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \psi_{1b} \, d\tau$$

etc ...

Le terme principal est $M_{2a,1a}$. Les termes correctifs deviennent de plus en plus faibles à mesure qu'on s'éloigne du terme principal, de gauche à droite ou de haut en bas. Bethe et Maximon ont tenu compte des termes $M_{2a,1a}'$,

$M_{2a,1b}$ et $M_{2b,1a}$. Ils estiment que leur calcul est valable avec une approximation relative de l'ordre de $1/E_1$ ou $1/E_2$. Nous introduirons (Ch. III et IV) les parties principales des termes d'ordre supérieur $M_{2a,1e}$, $M_{2b,1b}$ et $M_{2e,1a}$, ce qui nous ramènera à une approximation relative de l'ordre de $1/E_1^2$ ou $1/E_2^2$.

Explicitons les éléments de matrice de Bethe et Maximon, compte tenu de (1.35.1), (1.35.2), (1.36.1) et (1.36.2). Il vient :

$$\left. \begin{aligned} M_{2a,1a} &= N_2^* N_1 \cdot I_1 \langle u_2 | \vec{\alpha} \cdot \vec{e} | u_1 \rangle \\ M_{2a,1b} &= N_2^* N_1 \cdot \langle u_2 | (\vec{\alpha} \cdot \vec{e}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{I}_2) | u_1 \rangle \\ M_{2b,1a} &= N_2^* N_1 \cdot \langle u_2 | (\vec{\alpha} \cdot \vec{I}_3) (\vec{\alpha} \cdot \vec{e}) | u_1 \rangle \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } I_1 &= \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot F_2^* \cdot F_1 \cdot d\tau \\ \vec{I}_2 &= \frac{1}{2E_1} \cdot \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot F_2^* \cdot (\vec{\nabla} F_1) \cdot d\tau \\ \vec{I}_3 &= \frac{1}{2E_2} \cdot \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot (\vec{\nabla} F_2^*) \cdot F_1 \cdot d\tau \end{aligned}$$

Bethe et Maximon donnent :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 2 K \cdot \left\{ \frac{V_{12}}{q^2} \cdot \left(\frac{E_2}{D_1} - \frac{E_1}{D_2} \right) + \frac{iW_{12}}{D_1 D_2} \cdot \left[a_1 E_2 \left(\frac{\mu}{D_1} - 1 \right) + a_2 E_1 \left(\frac{\mu}{D_1} - 1 \right) \right] \right\} \\ \vec{I}_2 &= K \cdot \left\{ -\frac{V_{12}}{D_2} \cdot \frac{\vec{q}}{q^2} + ia_2 \frac{W_{12}}{D_1 D_2} \cdot \left[\vec{q} \left(\frac{\mu}{D_2} - 1 \right) + \frac{\vec{p}}{p_1} \right] \right\} \\ \vec{I}_3 &= K \cdot \left\{ \frac{V_{12}}{D_1} \cdot \frac{\vec{q}}{q^2} + ia_1 \frac{W_{12}}{D_1 D_2} \cdot \left[\vec{q} \left(\frac{\mu}{D_1} - 1 \right) - \frac{\vec{p}}{p_2} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec : } \mu &= k^2 - (p_1 + p_2)^2 \\ K &= 4 \pi a \cdot \left(\frac{D_2}{q^2} \right)^{ia_1} \cdot \left(\frac{D_1}{q^2} \right)^{-ia_2} \quad ; \quad |K| = 4 \pi a \\ x &= 1 - \frac{q^2 \mu}{D_1 D_2} \\ V_{12} &= V_{12}(x) = F(-ia_1, ia_2 ; 1 ; x) \\ W_{12} &= W_{12}(x) = \frac{1}{a_1 a_2} \cdot \frac{dV_{12}}{dx} = F(1 - ia_1, 1 + ia_2 ; 2 ; x) \\ \vec{p} &= p_2 \cdot \vec{p}_1 - p_1 \cdot \vec{p}_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Les fonctions hypergéométriques V_{12} et W_{12} peuvent être représentées par les développements :

$$\left. \begin{aligned} V_{12}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ia_1)_n \cdot (ia_2)_n}{(n!)^2} \cdot x^n \\ W_{12}(x) &= \frac{1}{a_1 a_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ia_1)_n \cdot (ia_2)_n}{(n-1)! n!} \cdot x^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

$$\text{avec : } (\gamma)_n = \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot (\gamma + 2) \dots (\gamma + n - 1) \quad ; \quad (\gamma)_0 = 1$$

Nous posons :

$$\left. \begin{aligned} Q &= I_1 \vec{\alpha} \cdot \vec{e} + (\vec{\alpha} \cdot \vec{e})(\vec{\alpha} \cdot \vec{I}_2) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{I}_3)(\vec{\alpha} \cdot \vec{e}) \\ M_{EM} &= M_{2a,1a} + M_{2a,1b} + M_{2b,1a} = N_2^* N_1 \langle u_2 | Q | u_1 \rangle \end{aligned} \right\} (1.44)$$

4. La section efficace différentielle de Bethe-Maximon

Elle se calcule à partir de l'équation (1.16) dans laquelle on fait :

$$|M|^2 = |M_{EM}|^2 = |N_1 N_2|^2 \cdot \langle u_1 | Q^\dagger | u_2 \rangle \cdot \langle u_2 | Q | u_1 \rangle$$

Il faut sommer sur les états de spin du négaton et du positon et faire la moyenne sur la polarisation du photon. Tous calculs faits, Bethe et Maximon obtiennent :

$$\begin{aligned} d\sigma_{EM} &= dE_1 \cdot d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \cdot d\Omega \cdot \frac{2 Z^2 e^6}{\pi} \cdot \frac{P_{1L} \cdot P_{2L}}{k} \cdot |N_1 N_2|^2 \cdot \\ &\quad \frac{2}{\pi} \{ J_{1v}^2 (E_1 E_2 + 1 - \vec{p}_{1z} \cdot \vec{p}_{2z}) + (\vec{J}_{2v}^2 + \vec{J}_{3v}^2) \cdot (E_1 E_2 - 1 + \vec{p}_{1z} \cdot \vec{p}_{2z}) \} \\ &\quad + 2 J_{2zv} \cdot J_{3zv} (E_1 E_2 - 1 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) + 2 (\vec{J}_{2v} \cdot \vec{J}_{3v}) \cdot (\vec{p}_2 \cdot J_{3zv} \vec{p}_{1z} - \vec{p}_1 \cdot J_{2zv} \vec{p}_2) \\ &\quad + 2 (\vec{p}_2 \cdot \vec{J}_{3v}) (\vec{p}_1 \cdot \vec{J}_{2v}) - 2 (\vec{p}_2 \cdot \vec{J}_{2v}) (\vec{p}_1 \cdot \vec{J}_{3v}) + 2 J_{1v} E_2 (\vec{p}_1 \cdot \vec{J}_{2v} - \vec{p}_{1z} \cdot J_{3zv}) \\ &\quad + 2 J_{1v} E_1 (\vec{p}_2 \cdot \vec{J}_{3v} - \vec{p}_{2z} \cdot J_{2zv}) + 2 (\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \vec{p}_{1z} \vec{p}_{2z}) \vec{J}_{2v} \cdot \vec{J}_{3v} \end{aligned} \quad (1.45)$$

L'axe des z est pris suivant le vecteur $\vec{k}$, l'indice v indique la partie réelle (v=1) et la partie imaginaire (v=2). Nous avons posé : $J_1 = I_1/K$; $\vec{J}_2 = \vec{I}_2/K$; $\vec{J}_3 = \vec{I}_3/K$. $|N_1 N_2|^2$ est donné par (1.38). Toutes les autres notations sont données p. 4 et 5

Comme nous l'avons indiqué précédemment, le calcul de Bethe et Maximon est valable avec une approximation relative en $1/E_1$ ou $1/E_2$. Dans ces conditions, on peut prendre : $E_1 = p_1$, $E_2 = p_2$ et $a_1 = a_2 = a$. La contribution principale à la section efficace provient d'angles : $\theta_1 \sim 1/E_1$ et $\theta_2 \sim 1/E_2$. Il est alors légitime de faire l'approximation des petits angles : $\sin \theta = \theta$; $\cos \theta = 1 - \theta^2/2$, $P_{1L} = P_1^0$ et $P_{2L} = P_2^0$.

On pose : $\xi = \frac{1}{1 + p_{1\perp}^2}$; $\eta = \frac{1}{1 + p_{2\perp}^2}$

Il apparaît alors de très grandes simplifications dans les formules précédentes ; en particulier $V_{12}(x)$ et $W_{12}(x)$ sont alors réels :

$$V(x) = 1 + a^2 x + \frac{a^2(1 + a^2)}{(2!)^2} \cdot x^2 + \dots$$

$$W(x) = 1 + \frac{1 + a^2}{1! \cdot 2!} \cdot x + \frac{(1 + a^2)(2^2 + a^2)}{2! \cdot 3!} \cdot x^2 + \dots$$

et la formule (1.45) se réduit à :

$$\begin{aligned} d\alpha'_{BM} = & dE_1 \cdot \theta_1 d\theta_1 \cdot \theta_2 d\theta_2 \cdot d\phi \cdot \frac{4 Z^2 e^6}{\pi} \cdot \frac{E_1^2 E_2^2}{k^3} \cdot \left(\frac{\pi a}{\text{sh } \pi a} \right)^2 \\ & \cdot \left\{ \frac{V^2}{q^4} \cdot [k^2(p_{1\perp}^2 + p_{2\perp}^2) \xi \eta - 2 E_1 E_2 \cdot (p_{1\perp}^2 \xi^2 + p_{2\perp}^2 \eta^2) \right. \\ & + 2 (E_1^2 + E_2^2) p_{1\perp} \cdot p_{2\perp} \xi \eta \cos \phi] + a^2 W^2 \xi^2 \eta^2 \\ & \cdot [k^2(1 - (p_{1\perp}^2 + p_{2\perp}^2) \xi \eta) - 2 E_1 E_2 (p_{1\perp}^2 \xi^2 + p_{2\perp}^2 \eta^2) \\ & \left. - 2 (E_1^2 + E_2^2) p_{1\perp} p_{2\perp} \xi \eta \cos \phi] \right\} \end{aligned} \quad (1.46)$$

C H A P I T R E I I I

TERMES CORRECTIFS A LA SECTION EFFICACE

DIFFERENTIELLE DE BETHE-MAXIMON

Posons :

$$M_C = M_{2a,1e} + M_{2b,1b} + M_{2e,1a} \quad (1.47)$$

et $M = M_{BM} + M_C \quad (1.48)$

M_{BM} étant donné par les formules (1.44). Le calcul de la section efficace fait intervenir :

$$|M|^2 = |M_{BM}|^2 + 2 \operatorname{Re}(M_{BM}^* M_C) + |M_C|^2 \quad (1.49)$$

Nous écrivons la section efficace sous la forme :

$$d\sigma = d\sigma_{BM} + d\sigma_C \quad (1.50.1)$$

$d\sigma_C$ englobant les termes correctifs que nous nous proposons d'évaluer à partir de : $2 \operatorname{Re}(M_{BM}^* M_C) + |M_C|^2$. Nous obtiendrons :

$$d\sigma_C = d\sigma_{C1} + d\sigma_{C2} + d\sigma_{C3} \quad (1.50.2)$$

1. Calcul des éléments de matrice complémentaires $M_{2a,1e}$, $M_{2b,1b}$

et $M_{2e,1a}$

a) Calcul de $M_{2a,1e}$

Nous partons de (1.35.4), que nous rappelons :

$$(\nabla^2 + p_1^2) \psi_{1e} = -\frac{a^2}{r^2} \cdot \psi_{1a} \quad (1.51)$$

et calculons de deux façons différentes l'intégrale :

$$J = \int \psi_{2a}^+ \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \alpha_e \cdot (\nabla^2 + p_1^2) \psi_{1e} \cdot d\tau \quad (1.52)$$

avec $\alpha_e = \vec{\alpha} \cdot \vec{e}$.

- Nous utilisons (1.51), (1.35.1) et (1.36.1), d'où :

$$J = -a^2 \cdot \int \psi_{2a}^+ \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \alpha_e \cdot \psi_{1a} \cdot \frac{d\tau}{r^2} = -N_2^* N_1 a^2 I_4 \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u_1 \rangle \quad (1.53)$$

où nous posons :

$$I_4 = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot F_2^* F_1 \cdot \frac{d\tau}{r^2} \quad (1.54)$$

- Intégrons par parties le terme en ∇^2 :

$$J = \int \nabla^2 (\psi_{2a}^+ e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \cdot \alpha_e \cdot \psi_{1e} d\tau + p_1^2 \cdot M_{2a,1e}$$

$$J = \int (\nabla^2 \psi_{2a}^+) \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \alpha_e \cdot \psi_{1e} d\tau + 2 i\vec{k} \cdot \int (\vec{\nabla} \psi_{2a}^+) \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \alpha_e \cdot \psi_{1e} d\tau + (p_1^2 - k^2) M_{2a,1e} \quad (1.55)$$

Nous remarquons que dans l'expression (1.55), le premier ordre non nul en $Z/137$ peut être obtenu en prenant $F_2^* \approx F_1 \approx 1$, ce qui revient à conserver seulement le premier terme dans le développement des fonctions hypergéométriques confluentes. Dans ces conditions, ψ_{2a}^+ et ψ_{1a} sont considérées comme des ondes planes (aux facteurs de normalisation près). On a :

$$\psi_{1a} \approx N_1 \cdot e^{-i\vec{r}_1 \cdot \vec{r}} \cdot u_1 \quad ; \quad \psi_{2a}^+ \approx N_2^* \cdot e^{-i\vec{p}_2 \cdot \vec{r}} \cdot u_2^+ \quad ;$$

$$I_4 \approx \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{d\tau}{r^2} = \frac{2\pi^2}{q} \quad (\text{Cf. appendice A}) \quad ;$$

$$\vec{\nabla} \psi_{2a}^+ \approx -i \vec{p}_2 \cdot \psi_{2a}^+ , \quad \nabla^2 \psi_{2a}^+ \approx -p_2^2 \psi_{2a}^+$$

(1.53) et (1.55) donnent :

$$J \approx -N_2^* N_1 \cdot \frac{2 \pi^2 a^2}{q} \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u_1 \rangle \approx [p_1^2 - (\vec{k} - \vec{p}_2)^2] \cdot M_{2a,1e}$$

On montre facilement que :

$$p_1^2 - (\vec{k} - \vec{p}_2)^2 = -D_2$$

d'où :

$$M_{2a,1e} \approx N_2^* N_1 \cdot \frac{2 \pi^2 a^2}{q D_2} \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u_1 \rangle \quad (1.56)$$

b) Calcul de $M_{2e,1a}$

Par le même procédé que pour $M_{2a,1e}$, nous trouvons :

$$M_{2e,1a} \approx N_2^* N_1 \cdot \frac{2 \pi^2 a^2}{q D_1} \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u_1 \rangle \quad (1.57)$$

c) Calcul de $M_{2b,1b}$

A l'aide de (1.35.2) et (1.36.2), nous pouvons écrire :

$$M_{2b,1b} = -\frac{N_2^* N_1}{4E_2 E_1} \cdot \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot d\tau \cdot \langle u_2 | (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_2^*) \alpha_e (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_1) | u_1 \rangle \quad (1.58)$$

La première approximation précédente ($F_2^* \approx F_1 \approx 1$), donnerait : $M_{2b,1b} \approx 0$.

Nous devons considérer le cas où les dérivées de fonctions hypergéométriques confluentes apparaissent dans l'élément de matrice.

Nous posons :

$$t_j = p_j r + \vec{p}_j \cdot \vec{r} , \text{ l'indice } j \text{ prenant les valeurs } 1 \text{ et } 2.$$

D'où :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_2^* = \frac{dF_2^*}{dt_2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} t_2 ; \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_1 = \frac{dF_1}{dt_1} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} t_1$$

$$\frac{dF_2^*}{dt_2} = -a_2 \cdot F(1 + ia_2 ; 2 ; it_2) ; \quad \frac{dF_1}{dt_1} = a_1 \cdot F(1 - ia_1 ; 2 ; it_1).$$

Au premier ordre non nul en $Z/137$, nous avons :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_2^* \approx -a_2 \cdot F(1; 2; it_2) \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} t_2$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_1 \approx a_1 \cdot F(1; 2; it_1) \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} t_1$$

Avec :
$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} t_j = p_j \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_j}{p_j} \right)$$

et :
$$F(1; 2; it_j) = (e^{it_j} - 1)/it_j$$

on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_2^* &\approx \frac{ia_2 p_2}{t_2} \cdot (e^{it_2} - 1) \cdot \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2}{p_2} \right) \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_1 &\approx -\frac{ia_1 p_1}{t_1} \cdot (e^{it_1} - 1) \cdot \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1}{p_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Nous aurons une évaluation suffisamment correcte de l'élément de matrice (d'autant plus correcte que l'énergie est élevée) en prenant dans (1.59) :

$$e^{it_j} - 1 \approx -1$$

$$\frac{1}{t_j} = \frac{1}{p_j r} \cdot \left(1 + \frac{\vec{p}_j \cdot \vec{r}}{p_j r} \right)^{-1} \approx \frac{1}{p_j r}$$

D'où :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_2^* &\approx -\frac{ia_2}{r} \cdot \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2}{p_2} \right) \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} F_1 &\approx \frac{ia_1}{r} \cdot \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1}{p_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Introduisant (1.60) dans (1.58), on obtient :

$$\begin{aligned} M_{2b,1b} &\approx -N_2^* N_1 \cdot \frac{a^2}{4 p_1 p_2} \cdot \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{d\tau}{r^2} \cdot \\ &\quad \cdot \langle u_2 | \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2}{p_2} \right) \alpha_e \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1}{p_1} \right) | u_1 \rangle \end{aligned}$$

Nous trouvons (appendice A) :

$$\int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{d\tau}{r^2} \cdot \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{r}) \alpha_e (\vec{\alpha} \cdot \vec{r})}{r^2} \approx \frac{2\pi^2}{q} \cdot \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{q}) \alpha_e (\vec{\alpha} \cdot \vec{q})}{q^2}$$

$$\int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot \frac{d\tau}{r^2} \cdot \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r} \approx 0$$

$$\int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot \frac{d\tau}{r^2} = \frac{2\pi^2}{q}$$

D'où :

$$M_{2b,1b} \approx - N_2^* N_1 \cdot \frac{\pi^2 a^2}{2 q p_1 p_2} \cdot \langle u_2 \left| \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{q} \alpha_e \vec{\alpha} \cdot \vec{q}}{q^2} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_e \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1}{p_1 p_2} \right| u_1 \rangle \quad (1.61)$$

2. Termes de section efficace associés aux éléments de matrice complémentaires

Les calculs d'ordre de grandeur de Bethe-Maximon montrent que la contribution à la section efficace des éléments de matrice $M_{2a,1e}$ et $M_{2e,1a}$ est d'ordre $1/E$, tandis que celle de $M_{2b,1b}$ est d'ordre $\text{Log } E/E^2$. Nous considérons donc séparément les deux termes complémentaires :

$$M_{C1} = M_{2a,1e} + M_{2e,1a}$$

$$M_{C2} = M_{2b,1b}$$

On trouve facilement que : $1/D_1 + 1/D_2 = 2\vec{k} \cdot \vec{q} / D_1 D_2$, d'où, compte tenu de (1.56) et (1.57) :

$$M_{C1} = N_2^* N_1 \cdot \frac{4 \pi^2 a^2 \vec{k} \cdot \vec{q}}{q D_1 D_2} \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u_1 \rangle \quad (1.62)$$

tandis que M_{C2} est donné par (1.61).

a) Calcul du terme correctif $d\sigma_{C1}$ déduit de $2 \text{Re}(M_{BM}^* M_{C1})$.

D'après (1.44) et (1.62) :

$$2 \text{Re}(M_{BM}^* M_{C1}) = |N_2 N_1|^2 \cdot \frac{8 \pi^2 a^2 \vec{k} \cdot \vec{q}}{q D_1 D_2} \cdot \text{Re} \{ \langle u_1 | Q^+ | u_2 \rangle \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u_1 \rangle \} \quad (1.63)$$

Dans (1.16), $|M|^2$ correspond actuellement à (1.63) ; la contribution à la section efficace est :

$$d\sigma_{C1} = dE_1 \cdot d\theta_1 \cdot d\theta_2 \cdot d\phi \cdot \frac{Z^2 e^6}{\pi} \cdot \frac{P_{1\perp} \cdot P_{2\perp}}{K} \cdot |N_2 N_1|^2 \cdot \frac{\vec{k} \cdot \vec{g}}{q D_1 D_2} \cdot E_1 E_2 \cdot \quad (1.64)$$

$$\cdot \text{Re} \{ S_e S_1 S_2 \{ \langle u_1 | Q^+ | u_2 \rangle \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u_1 \rangle \} \}$$

où les symboles S_1 et S_2 représentent les sommes sur les spins du négaton et du positon, et le symbole S_e la moyenne sur la direction de polarisation du photon incident.

Q étant donné par (1.44), nous montrons que (appendice B) :

$$\begin{aligned} S_e S_1 S_2 \{ \langle u_1 | Q^+ | u_2 \rangle \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u_1 \rangle \} &= \\ = \frac{1}{E_1 E_2} \cdot [I_1^* (E_1 E_2 + 1 - p_{1z} p_{2z}) + E_1 (\vec{p}_2 \cdot \vec{I}_3^* - p_{2z} \cdot I_{2z}^*) & (1.65) \\ + E_2 (\vec{p}_1 \cdot \vec{I}_2^* - p_{1z} I_{3z}^*)] \end{aligned}$$

Pour obtenir la partie réelle de l'expression (1.65), il suffit d'introduire les parties réelles de I_1 , $\vec{I}_2$ et $\vec{I}_3$ que nous notons I_{11} , $\vec{I}_{21}$ et $\vec{I}_{31}$. Les relations (1.41) donnent au 1^{er} ordre en $a = Z/137$:

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= 4\pi a \cdot \frac{2}{q^2} \left(\frac{E_2}{D_1} - \frac{E_1}{D_2} \right) \\ \vec{I}_{21} &= -4\pi a \cdot \frac{\vec{g}}{q^2 D_2} \\ \vec{I}_{31} &= 4\pi a \cdot \frac{\vec{g}}{q^2 D_1} \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

Grâce à (1.64), (1.65) et (1.66), nous obtenons ainsi le premier terme correctif :

$$\begin{aligned} d\sigma_{C1} &= dE_1 d\theta_1 d\theta_2 d\phi \cdot 4aZ^2 e^6 \cdot \frac{P_{1\perp} \cdot P_{2\perp} \cdot q_z}{q^3 D_1 D_2} \cdot |N_1 N_2|^2 \cdot \\ &\cdot \left[2 \left(\frac{E_2}{D_1} - \frac{E_1}{D_2} \right) (E_1 E_2 + 1 - p_{1z} p_{2z}) + E_1 \left(\frac{\vec{q} \cdot \vec{p}_2}{D_1} + \frac{q_z p_{2z}}{D_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - E_2 \left(\frac{\vec{q} \cdot \vec{p}_1}{D_2} + \frac{q_z p_{1z}}{D_1} \right) \right] \quad (1.67) \end{aligned}$$

$|N_1 N_2|^2$ est donné par (1.38).

b) Terme correctif $d\sigma_{C2}$ déduit de $2 \operatorname{Re} (M_{BM}^* M_{C2})$.

D'après (1.61), nous posons :

$$Q' = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{q} \alpha_e \vec{\alpha} \cdot \vec{q}}{q^2} + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_e \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1}{p_2 p_1} \quad (1.68)$$

D'où :

$$M_{C2} = N_2^* N_1 \cdot \left(-\frac{\pi a^2}{2 q p_1 p_2} \right) \cdot \langle u_2 | Q' | u_1 \rangle \quad (1.69)$$

(1.44) et (1.69) donnent :

$$2 \operatorname{Re} (M_{BM}^* M_{C2}) = |N_2 N_1|^2 \cdot \left(-\frac{\pi a^2}{q p_1 p_2} \right) \cdot \operatorname{Re} [\langle u_1 | Q^* | u_2 \rangle \cdot \langle u_2 | Q' | u_1 \rangle] \quad (1.70)$$

Dans (1.16), remplaçons $|M|^2$ par $2 \operatorname{Re} (M_{BM}^* M_{C2})$:

$$d\sigma_{C2} = dE_1 d\theta_1 d\theta_2 d\phi \cdot \frac{Z^2 e^6}{8\pi} \cdot \frac{p_{1\perp} \cdot p_{2\perp}}{k} \cdot |N_1 N_2|^2 \cdot \left(\frac{-1}{q p_1 p_2} \right) \cdot E_1 E_2 \cdot \operatorname{Re} \{ S_e S_1 S_2 [\langle u_1 | Q^* | u_2 \rangle \cdot \langle u_2 | Q' | u_1 \rangle] \} \quad (1.71)$$

Q et Q' étant donnés par (1.44) et (1.68), nous effectuons les sommes S_e , S_1 et S_2 (appendice B). Introduisant les parties réelles I_{11} , I_{21} et I_{31} données par (1.66), on obtient finalement :

$$d\sigma_{C2} = dE_1 d\theta_1 d\theta_2 d\phi \cdot \frac{a Z^2 e^6}{2} \cdot \frac{p_{1\perp} \cdot p_{2\perp}}{k q p_1 p_2} \cdot |N_1 N_2|^2 \cdot \left\{ 2 \left(\frac{E_2}{q_1} - \frac{E_1}{q_2} \right) \left[(E_1 E_2 + 1) \left(\frac{q_z^2}{q^2} + \frac{p_{1z} p_{2z}}{p_1 p_2} \right) - \frac{1}{q^2} (2 \vec{q} \cdot \vec{p}_1 \vec{q} \cdot \vec{p}_2 - q_z p_{1z} \vec{q} \cdot \vec{p}_2 - q_z p_{2z} \vec{q} \cdot \vec{p}_1 + q_z^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - p_{1z} p_{2z} - p_1 p_2 \right] + \sum_{i=1}^2 (-1)^j E_i \left\{ \frac{p_j}{p_i} \left(\frac{\vec{q} \cdot \vec{p}_i}{D_j} + \frac{q_z p_{iz}}{D_i} \right) + \frac{2 q_z^2}{q^2} \cdot \frac{\vec{q} \cdot \vec{p}_j}{D_i} + \frac{\vec{q} \cdot \vec{p}_j}{D_j} - \frac{q_z p_{iz}}{D_i} \right\} \right\} \quad (1.72)$$

avec : $j = i + 1$; pour $j = 3$, on prend $j = 1$; $|N_1 N_2|^2$ est donné par (1.38).

c) Terme correctif d'ordre supérieur $d\sigma_{C3}$.

Dans la mesure où : $|M_C| \ll |M_{BM}|$, la quantité $2 \operatorname{Re}(M_{BM}^* M_C)$ de (1.49) fournit les termes correctifs du premier ordre, tandis que $|M_C|^2$ conduit à des termes de deuxième ordre. Toutefois, les calculs numériques montreront que $d\sigma_{C1}$ peut être dans certains cas aussi important que $d\sigma_{BM}$, alors que $d\sigma_{C2}$ est en général très inférieur à $d\sigma_{C1}$. Nous sommes donc conduits à introduire un terme supplémentaire $d\sigma_{C3}$ dû à $|M_{C1}|^2$.

Une deuxième raison nous a d'ailleurs imposé ce calcul. Considérons $a = Z/137$ comme infiniment petit principal. Par examen des formules (1.20), (1.45), (1.67) et (1.72), il résulte que :

$$d\sigma_{BH} \text{ est en } a^2 ;$$

$$d\sigma_{BM}/|N_1 N_2|^2 \text{ peut être développé en puissance de } a,$$

$$\text{le 1er ordre étant en } a^2 ;$$

$$d\sigma_{C1}/|N_1 N_2|^2 \text{ et } d\sigma_{C2}/|N_1 N_2|^2 \text{ sont en } a^3.$$

Nous trouverons que $d\sigma_{C3}/|N_1 N_2|^2$ est en a^4 . Or, nous savons que, près du seuil, la correction à l'approximation de Born sur la section efficace totale est en $(Z/137)^2$ (6). Il est donc intéressant d'introduire $d\sigma_{C3}$ pour évaluer l'importance de la correction en $(Z/137)^2$ dans le domaine des énergies intermédiaires.

D'après (1.62), nous avons :

$$|M_{C1}|^2 = |N_1 N_2|^2 \cdot \left(\frac{4\pi^2 a^2 k q}{q D_1 D_2} Z \right)^2 \cdot \langle u_1 | \alpha_e | u_2 \rangle \cdot \langle u_2 | \alpha_e | u_1 \rangle \quad (1.73)$$

Compte tenu de (1.16) où nous remplaçons $|M|^2$ par $|M_{C1}|^2$, nous obtenons, après avoir effectué les sommes habituelles S_e, S_1 et S_2 (appendice B):

$$d\sigma_{C3} = dE_1 d\theta_1 d\theta_2 d\phi \cdot 2\pi a^2 Z^2 e^6 \cdot k p_{1\perp} \cdot p_{2\perp} \left(\frac{q_z}{q D_1 D_2} \right)^2 \cdot |N_1 N_2|^2 \cdot (E_1 E_2 + 1 - p_{1z} \cdot p_{2z}) \quad (1.74)$$

3. Les approximations dans le calcul des termes correctifs

Les approximations sont évidemment justifiées par le fait que nous calculons des termes correctifs, mais il est en général difficile de chiffrer exactement l'erreur introduite.

La validité des approximations dépend de deux paramètres : le numéro atomique Z et l'énergie (E_1 ou E_2). Nous avons fréquemment signalé : "approximation d'autant plus valable que l'énergie est élevée". Sur ce point, les estimations d'ordre de grandeur semblent montrer que l'erreur relative est généralement en $1/E^2$; les calculs numériques qui suivent et la confrontation à l'expérience permettront de conclure de façon plus précise. Dans la mesure où cette difficulté est levée, nous pouvons dire que par rapport à $Z/137$, les calculs sont valables jusqu'à l'ordre $(Z/137)^3$, la section efficace de Bethe et Heitler étant en $(Z/137)^2$.

CHAPITRE IV

ETUDE NUMERIQUE

DES DIFFERENTES FORMULES DE SECTION EFFICACE

Nous nous intéressons à la distribution énergétique des paires, non aux distributions angulaires. Les différentes formules de section efficace données précédemment doivent d'abord être intégrées sur les angles θ_1 , θ_2 et ϕ .

1. Intégrations angulaires.

a) Section efficace de Bethe-Heitler.

La section efficace différentielle (1.20) s'intègre sur les angles par des méthodes élémentaires ⁽²¹⁾. Elle donne :

$$\begin{aligned} \sigma_{BH} = Z^2 e^6 \cdot \frac{dE_1}{k^3} \cdot \left\{ -\frac{4}{3} p_1 p_2 - 2E_1 E_2 \cdot \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 p_2} + \frac{p_1 E_1 \Sigma_2}{p_2^2} + \frac{p_2 E_2 \Sigma_1}{p_1^2} - \Sigma_1 \Sigma_2 \right. \\ \left. + L \cdot \left[\frac{k^2}{p_1^2 p_2^2} \cdot (E_1^2 E_2^2 + p_1^2 p_2^2) - \frac{8}{3} E_1 E_2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{E_1 E_2 - p_2^2}{p_2^3} \cdot \Sigma_2 + \frac{E_1 E_2 - p_1^2}{p_1^3} \cdot \Sigma_1 + \frac{2k E_1 E_2}{p_1^2 p_2^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.75)$$

avec $\Sigma_i = 2 \cdot \text{Log}(E_i + p_i)$, $i = 1, 2$,

$$L = 2 \cdot \text{Log}\left(\frac{E_1 E_2 + p_1 p_2 + 1}{k}\right)$$

Dans le cas ultra-relativiste où toutes les énergies sont grandes devant l'énergie au repos de l'électron, (1.75) se simplifie :

$$\sigma'_{BH} = 4 Z^2 e^6 \cdot \frac{dE_1}{3k} \cdot (E_1^2 + E_2^2 + \frac{2}{3} E_1 E_2) \cdot \left(\text{Log} \frac{2E_1 E_2}{k} - \frac{1}{2}\right) \quad (1.76)$$

avec : $k, E_1, E_2 \gg 1$.

b) Section efficace de Bethe-Maximon ultrarelativiste.

La section efficace différentielle ultra-relativiste de Bethe et Maximon (1.46) s'intègre aussi sur les angles - Davies, Bethe, Maximon⁽³⁶⁾. Elle conduit à un terme correctif qui s'ajoute à la section efficace ultra-relativiste de Bethe-Heitler (1.76). On a :

$$\sigma'_{BM} = 4 Z^2 e^6 \cdot \frac{dE_1}{3k} \cdot (E_1^2 + E_2^2 + \frac{2}{3} E_1 E_2) \cdot \left[\text{Log} \frac{2E_1 E_2}{k} - \frac{1}{2} - f(Z)\right] \quad (1.77)$$

$$\text{avec : } f(Z) = a^2 \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v \cdot (v^2 + a^2)} = a^2 \cdot \left[\frac{1}{1 + a^2} + 0,20206 \right.$$

$$\left. - 0,0369 a^2 + 0,0083 a^4 - 0,002 a^6 \right] \quad (1.78)$$

$k, E_1, E_2 \gg 1$.

Dans le cas Z faible : $f(Z) \sim 1,2021 a^2$.

c) Intégration numérique de la section efficace différentielle

de Bethe-Maximon (1.45).

Les calculs numériques ont été effectués sur l'ordinateur CDC 6600 du CERN à Genève. Nous précisons en appendice C la méthode d'élaboration du programme correspondant.

L'étude numérique de l'intégrale est conduite en trois étapes (appendice D) :

- calcul de $d\sigma_{BM}(Z, k, y, \theta_1, \theta_2, \phi)$ en fonction de l'une des variables angulaires, les autres variables étant fixées. y représente la fraction d'énergie cinétique emportée par le positon :

$$y = \frac{E_1 - 1}{k - 2} \quad (1.79)$$

Cette première étape permet de vérifier la bonne marche des calculs.

- détermination des limites d'intégration
- détermination des pas d'intégration.

La précision du calcul numérique est toujours meilleure que 1 % (ou de l'ordre de 1 %).

d) Intégration numérique de $d\sigma_{C1}$ donné par (1.67).

Les calculs sont faits sur l'ordinateur IBM 1620, équipé d'une unité de disque IBM 1311, au Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand. L'étude de l'intégrale triple est conduite comme pour σ_{BM} (appendice D). L'erreur de calcul est dans tous les cas $\lesssim 5\%$, précision suffisante pour un terme correctif.

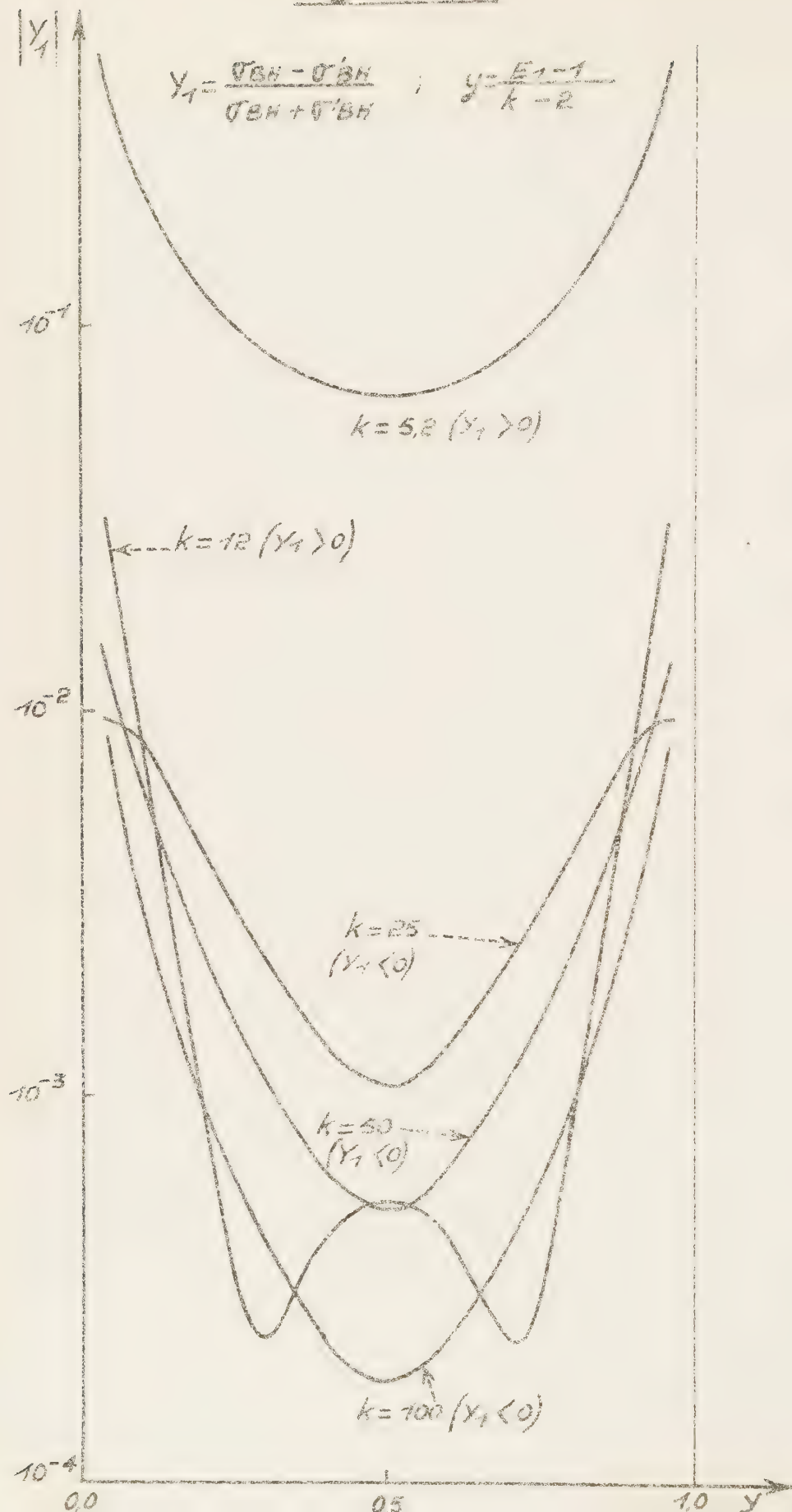
e) Intégration de $d\sigma_{C3}$ donné par (1.74).

La relation (1.74) s'intègre simplement sur ϕ ; on trouve :

$$\begin{aligned} \sigma_{C3} = & Z^2 e^6 \cdot dE_1 \cdot 4\pi^2 a^2 k \cdot |N_1 N_2|^2 \cdot \\ & \cdot \iint d\theta_1 \cdot d\theta_2 \cdot \frac{p_{1\perp} \cdot p_{2\perp} \cdot q_z^2}{D_1^2 D_2^2} \cdot (E_1 E_2 + 1 - p_{1z} p_{2z}) \cdot \\ & \cdot \left\{ [k^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2k(p_{1z} + p_{2z}) + 2 p_{1z} p_{2z}]^2 - 4 p_{1\perp}^2 p_{2\perp}^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.80)$$

$|N_1 N_2|^2$ étant donné par (1.38).

Figure 1.5.



L'intégration de (1.80) sur θ_1 et θ_2 est faite numériquement dans le même programme que σ_{C1} (appendice D). L'erreur de calcul est $\sim 10\%$.

f) Intégration de $d\sigma_{C2}$ donné par (1.72).

Nous utilisons l'ordinateur IBM 1620. Les valeurs numériques obtenues sont très inférieures à celles de σ_{C1} ou σ_{C3} . Nous nous sommes limités aux calculs relatifs à $k = 5,2$ avec les limites et les pas d'intégration des tableaux 1.1 et 1.2 (appendice D).

2. Comparaison des sections efficaces intégrées sur les angles.

Domaines de validité des différentes formules.

Nous nous proposons de préciser numériquement les conditions de validité des différentes formules de section efficace, en fonction des énergies mises en jeu (k, y) et du numéro atomique de la cible (Z). Dans ce but, nous introduisons en général des quantités de la forme :

$$Y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

qui représentent la moitié de l'écart relatif entre σ_1 et σ_2 ; la validité d'une approximation telle que : $\sigma_2 \sim \sigma_1$ apparaît de cette façon plus nettement que dans le seul calcul de σ_1 et σ_2 .

a) Formules de Bethe et Heitler.

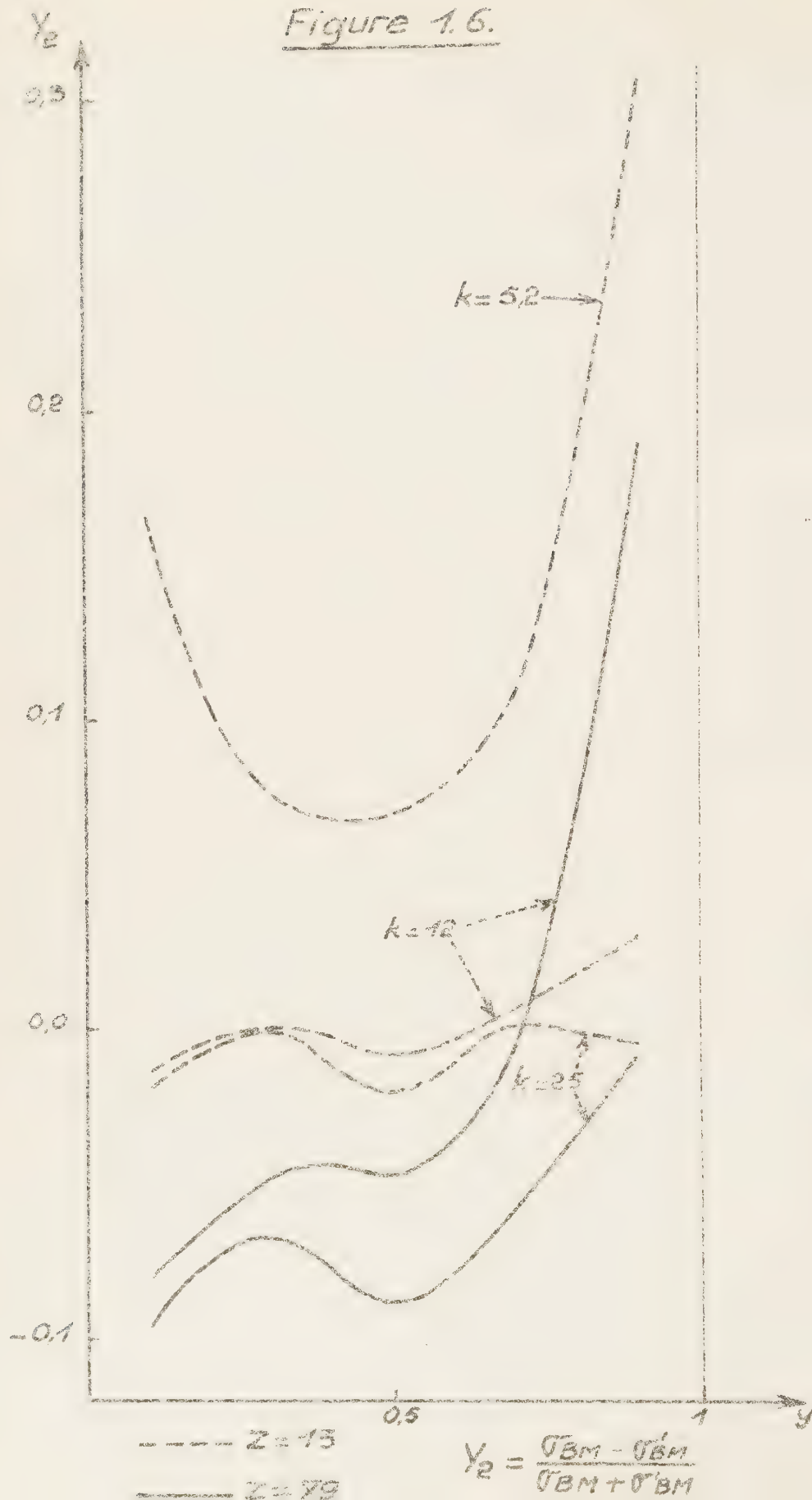
La figure 1.5 montre :

$$Y_1 = \frac{\sigma_{BH} - \sigma'_{BH}}{\sigma_{BH} + \sigma'_{BH}}$$

en fonction de y pour $k = 5,2 - 12 - 25 - 50 - 100$, σ_{BH} et σ'_{BH} étant donnés par les relations (1.75) et (1.76) respectivement, y par (1.79).

On voit que la formule (1.76), section efficace ultrarelativiste, est pratiquement valable pour $k \gtrsim 12$, Y_1 étant alors inférieur à 1 % pour $0,1 < y < 0,9$.

Figure 1.6.



b) Sections efficaces de Bethe et Maximon.

La figure 1.6 donne :

$$Y_2 = \frac{\sigma_{BM} - \sigma'_{BM}}{\sigma_{BM} + \sigma'_{BM}}$$

en fonction de y pour :

$$Z = 13 \quad ; \quad k = 5,2 - 12 - 25$$

et :

$$Z = 79 \quad ; \quad k = 12 - 25$$

σ'_{BM} (section efficace ultrarelativiste) est fourni par la formule (1.74) et σ_{BM} par intégration numérique de (1.45) comme il a été dit précédemment.

Ces résultats constituent un test supplémentaire de l'intégration numérique. En effet, pour $Z = 13$, on constate que, lorsque k est supérieur ou égal à 12, σ'_{BM} est pratiquement égal à σ_{BM} , l'écart relatif Y_2 étant inférieur à 3 % (ou de l'ordre de 3 %). Pour $Z = 79$, la formule ultrarelativiste semble valable avec un écart $Y_2 \lesssim 10$ % à partir de $k = 25$; la courbe relative à $k = 5,2$ n'a pu être portée sur le graphique, Y_2 étant trop grand.

Pour Z faible, la condition de validité de la formule ultrarelativiste est donc la même que dans le cas des formules de Bethe et Heitler ($k \gtrsim 12$). Pour Z élevé la limite inférieure de validité est beaucoup plus importante.

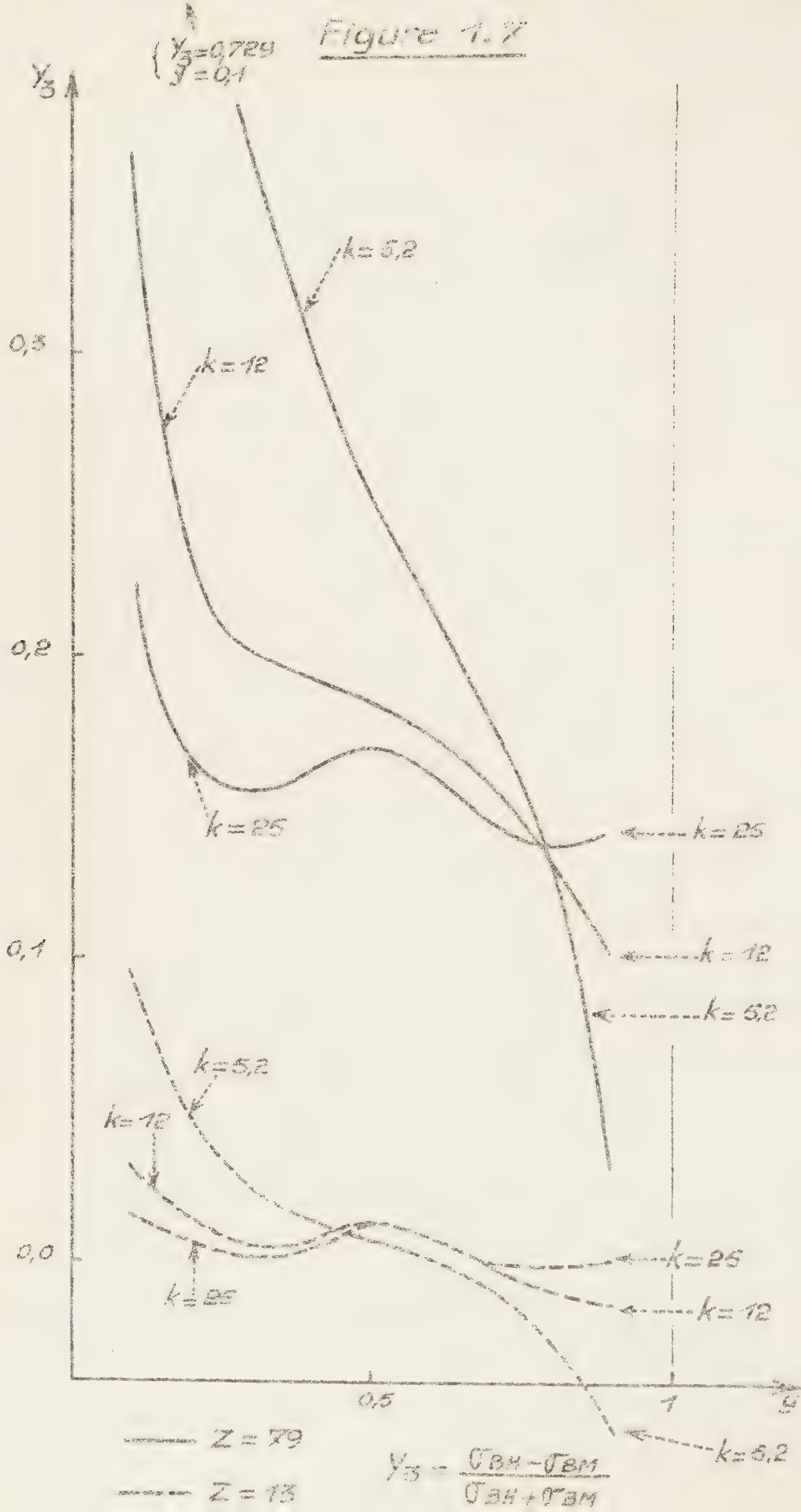
c) Formules de Bethe-Heitler et de Bethe-Maximon.

On calcule en fonction de y , pour $Z = 13$ et 79 :

$$Y_3 = \frac{\sigma_{BH} - \sigma_{BM}}{\sigma_{BH} + \sigma_{BM}} \quad \text{pour } k = 5,2 - 12 - 25 :$$

$$Y_4 = \frac{\sigma'_{BH} - \sigma'_{BM}}{\sigma'_{BH} + \sigma'_{BM}} \quad \text{pour } k = 12 - 25 - 50 - 100$$

Figure 1.7



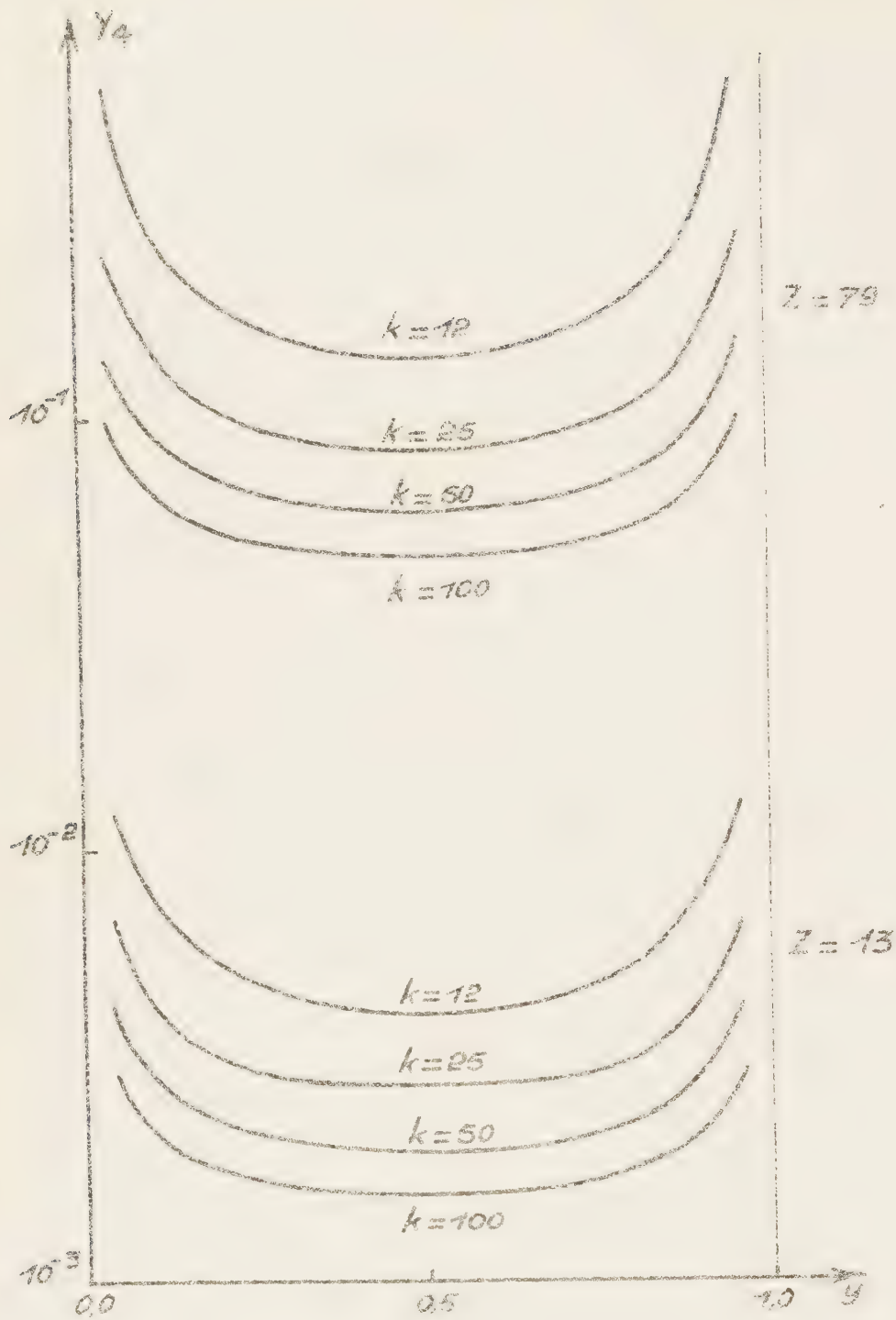
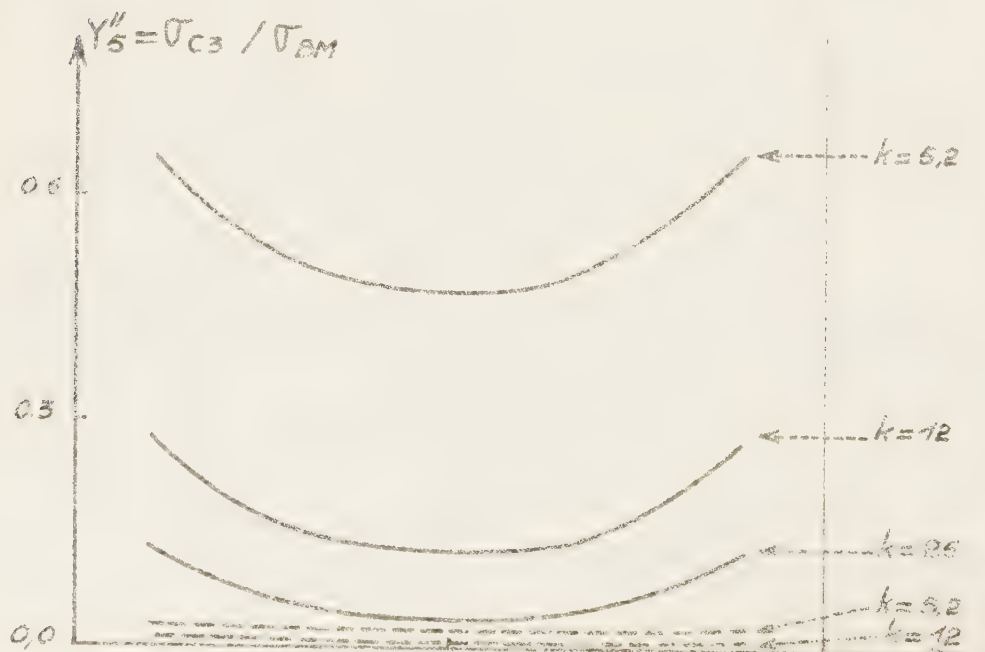
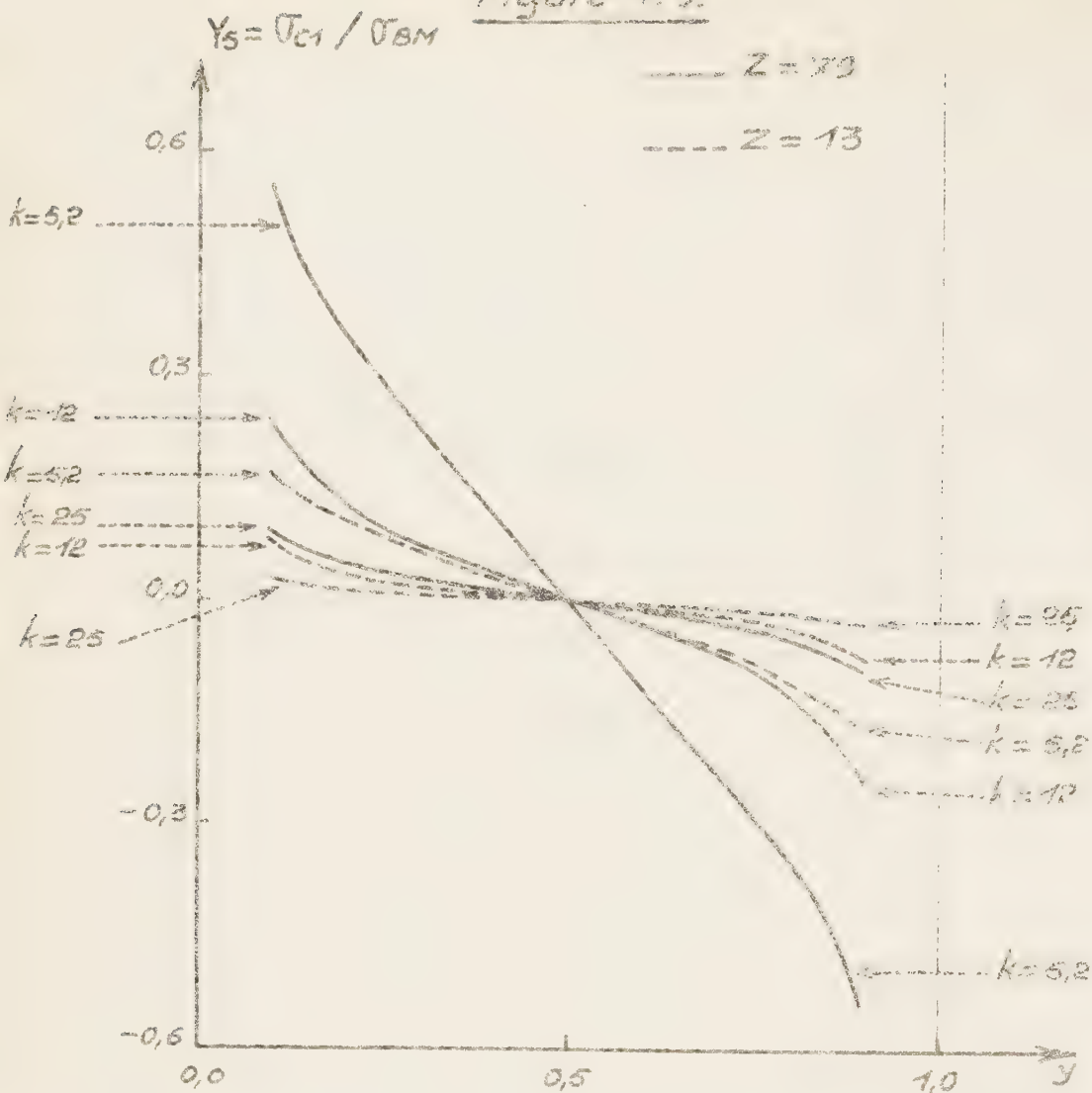


Figure 1.8.

$$Y_4 = \frac{\sigma'_{BH} - \sigma'_{BM}}{\sigma'_{BH} + \sigma'_{BM}} ; y = \frac{E_1 - 1}{k - 2}$$

Figure 1.9.



Les figures 1.7 et 1.8 montrent que σ_{BM} et σ'_{BM} sont très voisins de σ_{BH} , dans le cas $Z=13$, σ'_{BM} étant de plus valable à haute énergie ($k > 12$), il résulte que l'approximation de Born est valable dans ces conditions ; c'est ce que nous avons admis p. 14 et que nous retrouvons maintenant de façon précise : *on peut appliquer l'approximation de Born pour : $Z = 13$ et $k \gtrsim 12$, avec une erreur sur la section efficace inférieure à quelques %, et d'autant mieux que k est élevé.*

Pour $k = 5,2$ (et $Z = 13$) nous attendons le calcul de σ_C pour conclure de façon précise (cf. paragraphe e) p. 39).

Pour $Z = 79$, l'approximation de Born n'est jamais valable et entraîne une erreur de l'ordre de 10 % pour k supérieur ou égal à 100.

d) Comparaison de σ_{C1} , σ_{C2} , σ_{C3} et σ_{BM} .

On calcule :

$$Y_5 = \sigma_{C1} / \sigma_{BM} \quad \text{et} \quad Y''_5 = \sigma_{C3} / \sigma_{BM}$$

en fonction de y pour : $Z = 13 - 79$ et $k = 5,2 - 12 - 25$.

La figure 1.9 montre que $|Y_5|$ et Y''_5 sont symétriques par rapport à $y = 0,5$ comme on le remarque aussi par inspection des formules ; on voit que σ_{C1} s'annule pour $y = 0,5$.

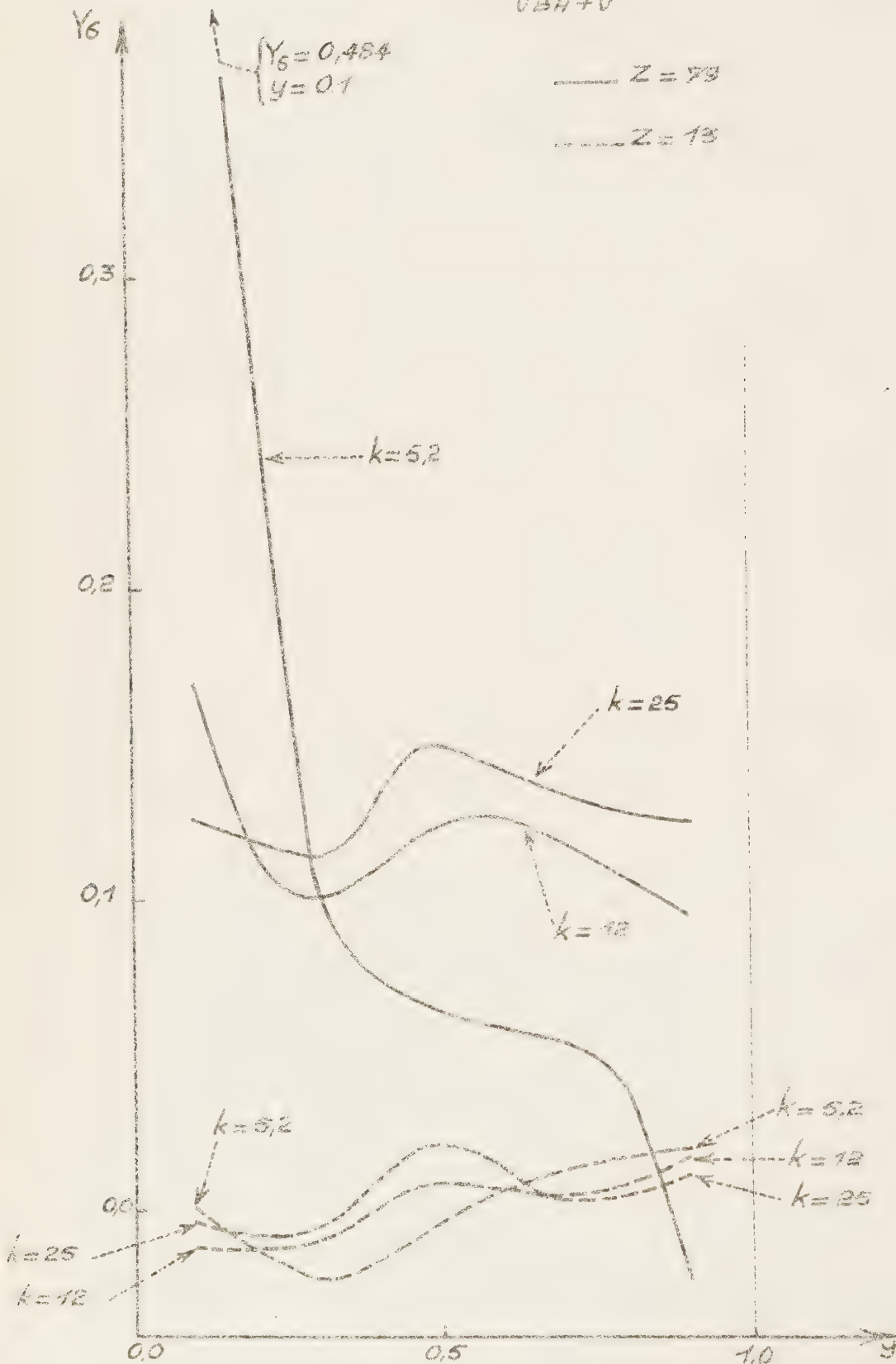
$Y'_5 = \sigma_{C2} / \sigma_{BM}$ a été calculé uniquement pour : $k = 5,2$, $Z = 13$ et 79. Nous trouvons que σ_{C2} est très inférieur à σ_{C1} ou σ_{C3} (au moins 50 fois plus petit). Par la suite, nous négligeons σ_{C2} et prenons simplement :

$$\sigma_C = \sigma_{C1} + \sigma_{C3}$$

Pour $Z = 13$, on a toujours : $\sigma_{C3} \ll \sigma_{C1}$ (sauf au voisinage de $y = 0,5$) ; ceci est normal car, dans le calcul des termes correctifs, on peut alors se limiter au 1^{er} ordre en $Z/137$. Il n'en est pas de même pour $Z = 79$; le terme correctif σ_{C3} en $(Z/137)^2$ est toujours supérieur à σ_{C1} ou voisin de σ_{C1} ; dans ces conditions, notre calcul n'est pas absolument rigoureux car le terme en $(Z/137)^2$ est incomplet (cf. p. 32).

Figure 1.10

$$Y_6 = \frac{U_{BH} - \sigma}{U_{BH} + \sigma}$$



La correction relative σ_C/σ_{BM} est pratiquement négligeable pour $Z = 13$ à partir de k de l'ordre de 12 ou 25 :

$$|Y_5| \lesssim \begin{array}{cc} 15 \% & \text{pour } k = 5,2 \\ 7 \% & 12 \\ 3 \% & 25 \end{array}$$

Pour $Z = 79$, la correction relative est importante, $\sigma_C = \sigma_{C1} + \sigma_{C3}$ étant du même ordre de grandeur que σ_{BM} pour $k = 5,2$.

e) Comparaison de $\sigma = \sigma_{BM} + \sigma_{C1} + \sigma_{C3}$ et σ_{BH} .

On calcule (figure 1.10) :

$$Y_6 = \frac{\sigma_{BH} - \sigma}{\sigma_{BH} + \sigma}$$

La comparaison avec la figure 1.7 montre que l'écart avec l'approximation de Born diminue en général lorsqu'on introduit $\sigma_C = \sigma_{C1} + \sigma_{C3}$

L'approximation de Born est valable dans le cas $Z = 13$ avec une erreur $|Y_6| \lesssim 2 \%$.

Dans le cas $Z = 79$, la distribution $\sigma(y)$ est à peu près uniformément plus faible de 10 à 15 % par rapport à $\sigma_{BH}(y)$ pour $k \gtrsim 12$.

3. Conclusion de la partie théorique.

Deux séries d'expériences sont présentées dans la 2e partie : l'une avec les ^{photons}monochromatiques de 2,6 MeV du ThC'' ($k \simeq 5,2$), l'autre avec un spectre durci de rayonnement de freinage d'énergie maximale 13 MeV ($k \simeq 25$).

La première série a été faite pour 3 valeurs de Z : 13, 47 et 79. Les courbes théoriques à vérifier seront essentiellement celles des figures 1.7 et 1.10 pour $k = 5,2$.

La deuxième série a été faite avec $Z = 13$ et 79. L'énergie T_1 du positon est fixée à une valeur comprise entre 0,5 et 2 MeV ($2 \lesssim E_1 \lesssim 5$). On obtient le spectre en énergie du négaton. La section efficace de production de paire qui intervient est de la forme $\sigma(E_2)$ pour Z et E_1 fixés.

Figure 1.11.

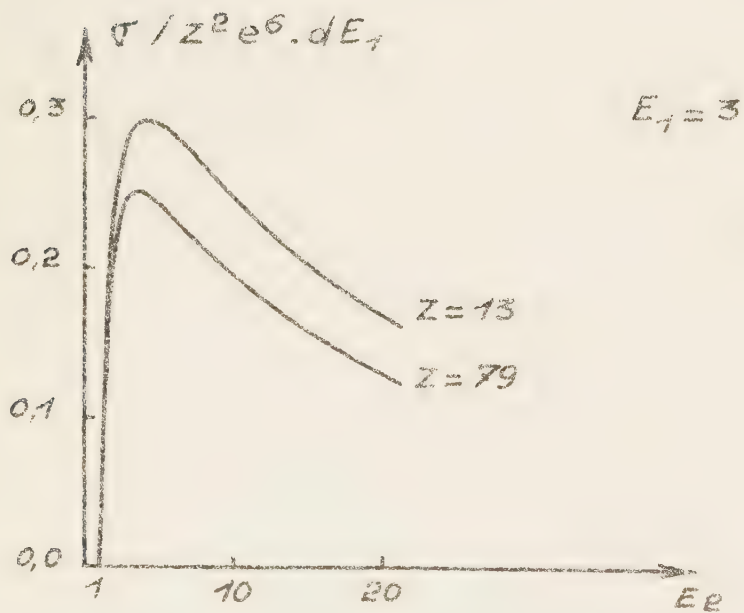
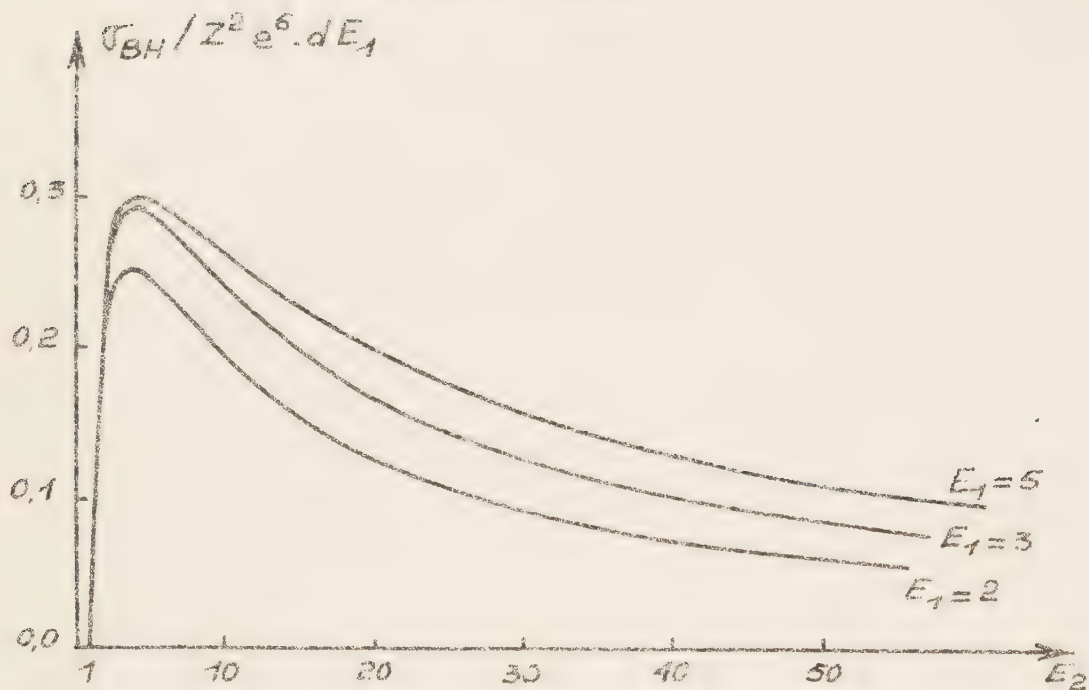


Figure 1.12

$$Y_1 = \frac{\sigma_{BH} - \sigma'_{BH}}{\sigma_{BH} + \sigma'_{BH}}$$

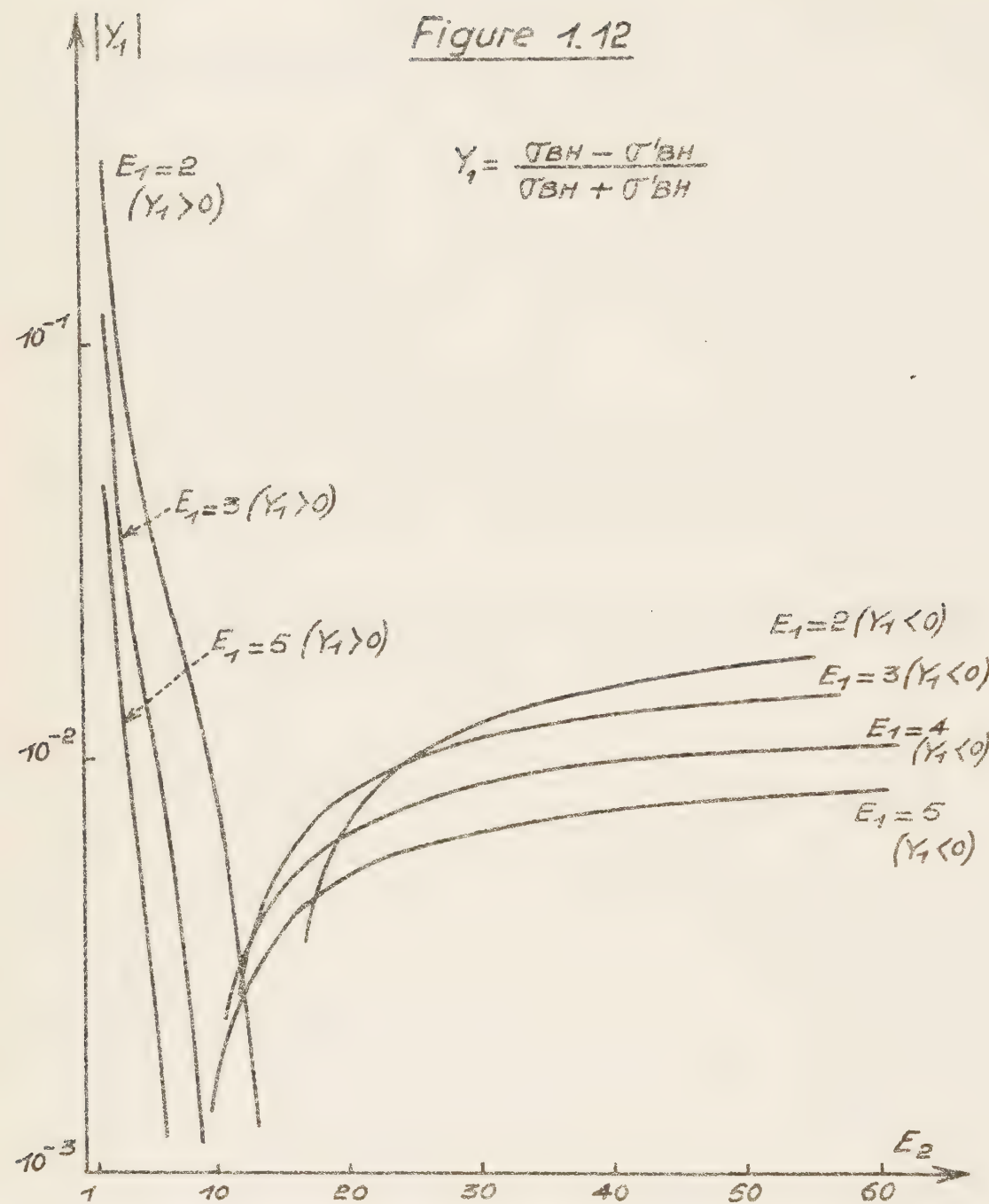


Figure 1.13.

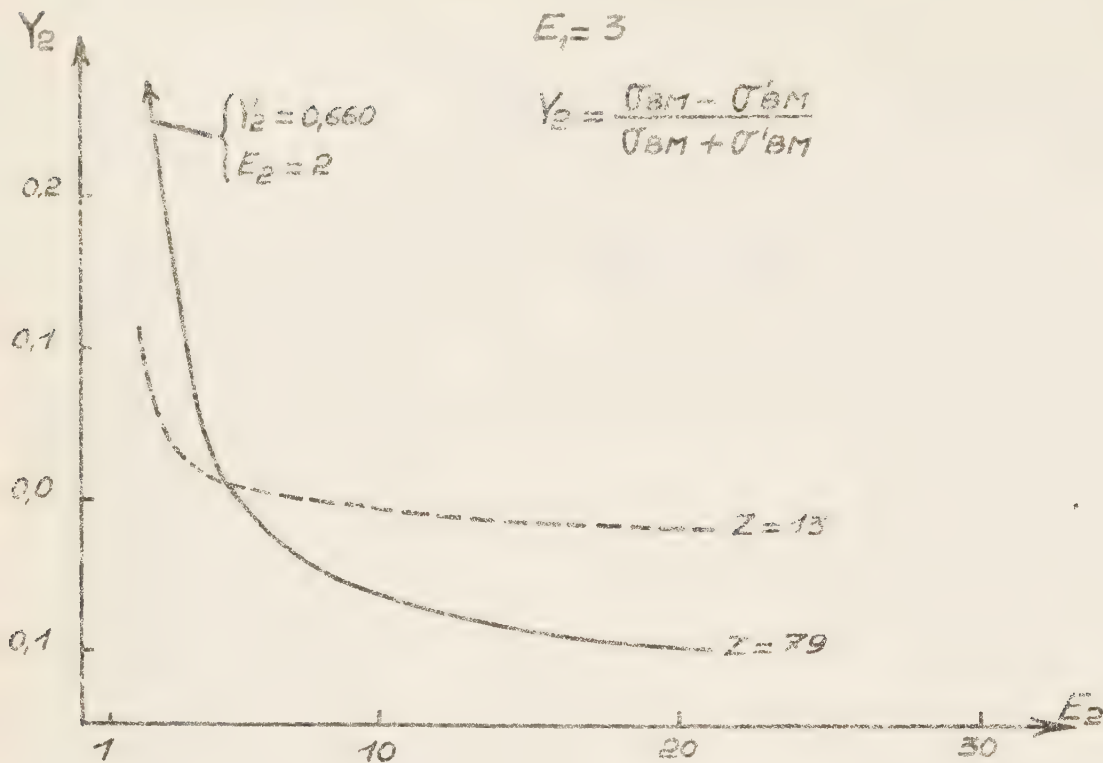


Figure 1.14.

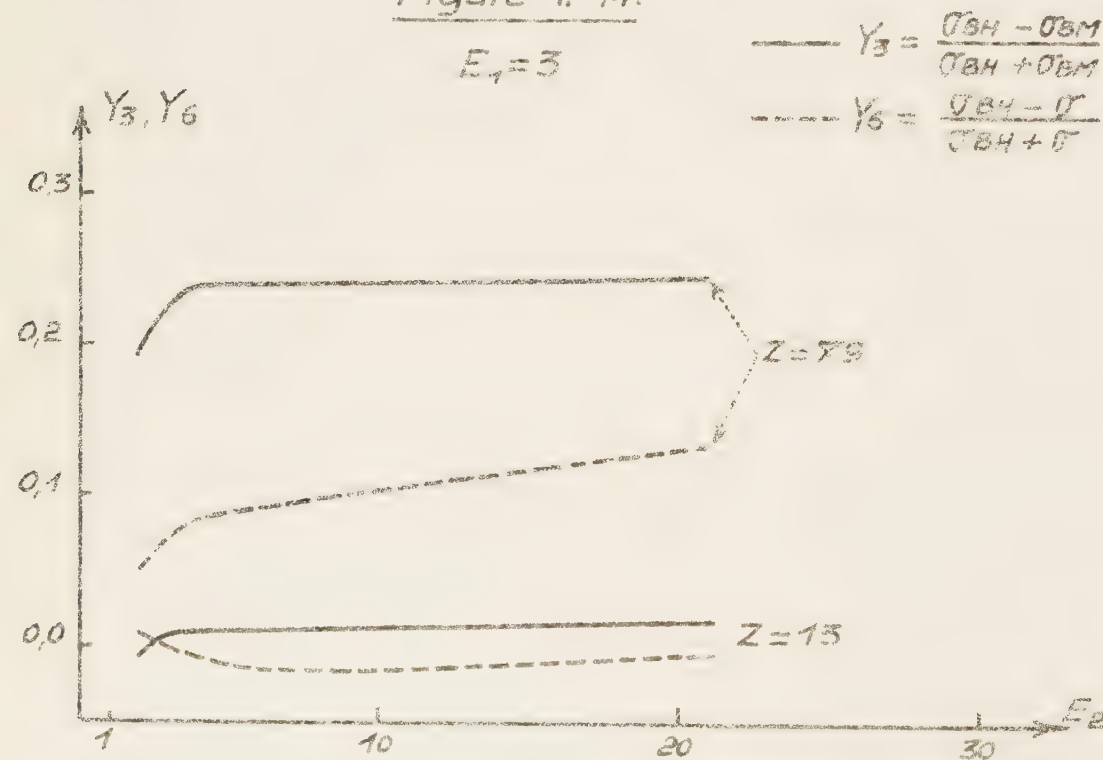
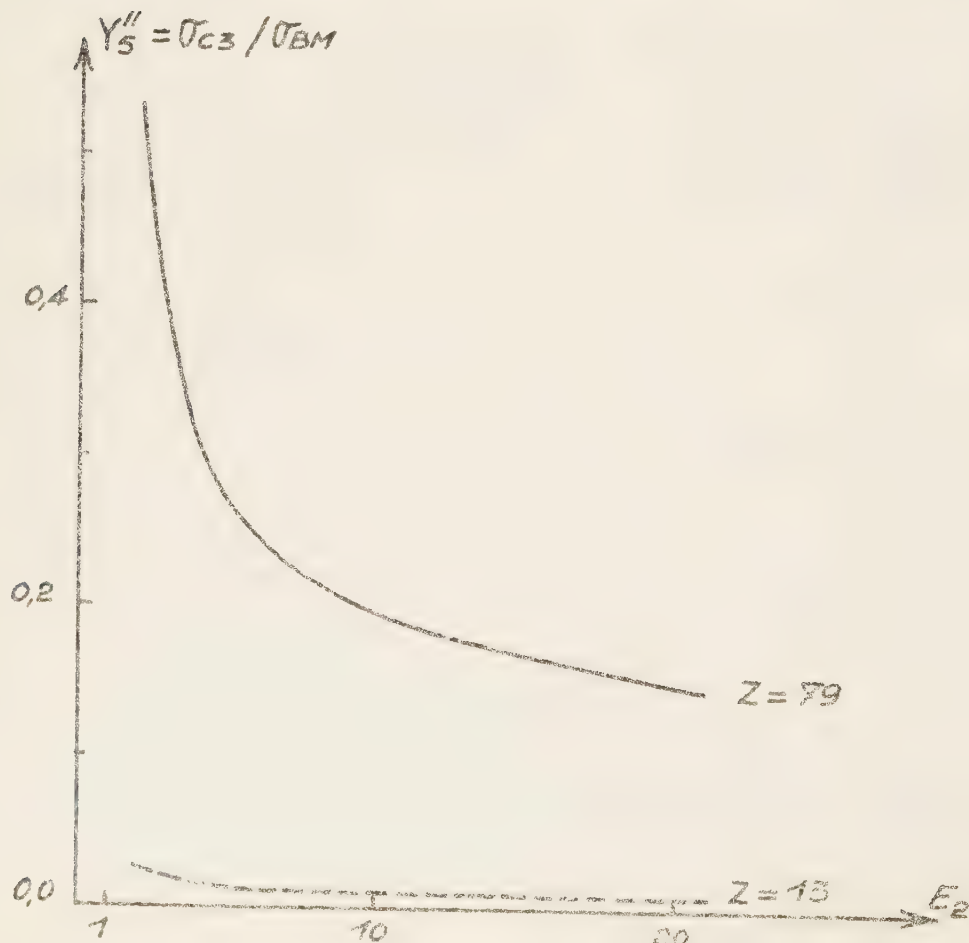
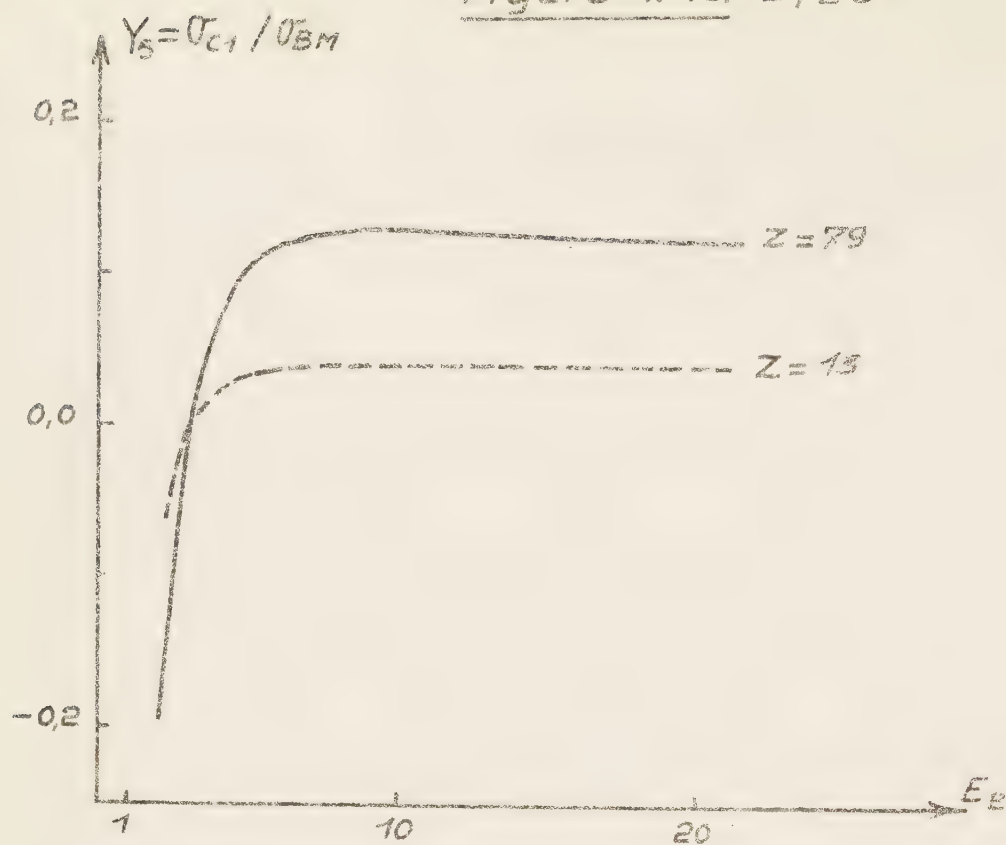
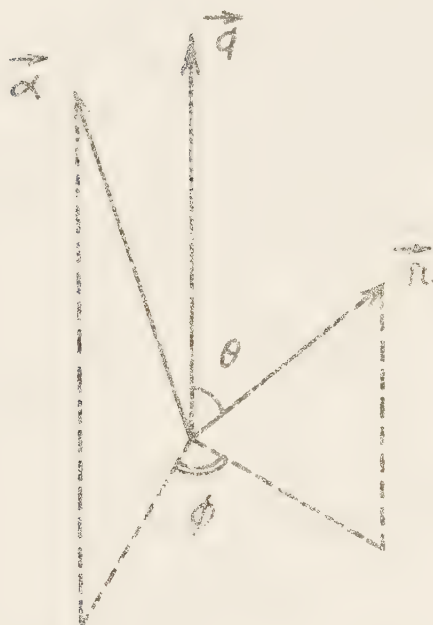


Figure 1.15. $E_1 = 3$



Les figures 1.11 à 1.15 montrent différentes fonctions de E_2 que l'on utilisera. On voit que les formules ultrarelativistes sont pratiquement valables pour une grande partie du spectre dans le cas $Z = 13$, et ne sont pas valables dans le cas σ'_{BM} et $Z = 79$ (figures 1.12 et 1.13). Les remarques faites p. 39 au sujet de $Y_5 = \sigma_{C1} / \sigma_{BM}$ et $Y''_5 = \sigma_{C3} / \sigma_{BM}$ restent valables : la figure 1.15 montre qu'en général : $\sigma_{C3} \ll \sigma_{C1} \ll \sigma_{BM}$ pour $Z = 13$, et que : $\sigma_{C3} \gtrsim \sigma_{C1}$ pour $Z = 79$. Les courbes à vérifier expérimentalement seront essentiellement celles de la figure 1.14.

Figure 1.16



APPENDICE A

Calcul des intégrales :

$$A_1 = \iiint e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot \frac{d\tau}{r^2}$$

$$A_2 = \iiint e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot \frac{d\tau}{r^2} \cdot \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r}$$

$$A_3 = \iiint e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot \frac{d\tau}{r^2} \cdot \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{r}) \alpha_e (\vec{\alpha} \cdot \vec{r})}{r^2}$$

Nous considérons les coordonnées polaires r, θ et ϕ , comme l'indique la figure 1.16. D'où :

$$d\tau = r^2 dr \cdot \sin\theta d\theta \cdot d\phi$$

$$\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos\theta$$

$$\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}{r} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{q}}{q} \cos\theta + \frac{|\vec{\alpha} \wedge \vec{q}|}{q} \sin\theta \cos\phi = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{q}}{q} \cos\theta + I\sqrt{2} \sin\theta \cos\phi$$

avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

L'intégration partielle sur ϕ , de 0 à 2π , donne :

$$A_1 = 2\pi \cdot \iint e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot dr \cdot \sin\theta d\theta$$

$$A_2 = 2\pi \cdot \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{q}}{q} \cdot \iint e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot dr \cdot \sin\theta d\theta \cdot \cos\theta$$

$$A_3 = 2\pi \cdot \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{q}) \alpha_e (\vec{\alpha} \cdot \vec{q})}{q^2} \cdot \iint e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot dr \cdot \sin\theta d\theta \cdot \cos^2\theta$$

$$+ 2\pi\alpha_e \cdot \iint e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \cdot dr \cdot \sin\theta d\theta \cdot \sin^2\theta$$

L'intégration partielle par rapport à θ pris de 0 à π donne :

$$A_1 = -2\pi \cdot \int \frac{dr}{iqr} \cdot (e^{-iqr} - e^{iqr})$$

$$A_2 = -2\pi \cdot \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{q}}{q} \cdot \int \frac{dr}{(iqr)^2} \cdot \{-iqr(e^{-iqr} + e^{iqr}) - e^{-iqr} + e^{iqr}\}$$

$$A_3 = \alpha_e A_1 - 2\pi \cdot \left\{ \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{q})}{q} \frac{\alpha_e (\vec{\alpha} \cdot \vec{q})}{2} - \alpha_e \right\} \cdot \int \frac{dr}{(iqr)^3} \cdot$$

$$\cdot \{ (iqr)^2 (e^{-iqr} - e^{iqr}) + 2iqr (e^{-iqr} + e^{iqr}) + 2(e^{-iqr} - e^{iqr}) \}$$

Nous considérons A_2 comme négligeable à cause du facteur $1/r^2$ sous le signe somme (approximation d'autant plus valable que l'énergie est élevée). Il faut d'ailleurs remarquer que A_2 est imaginaire pur ce qui introduirait dans le calcul de la section efficace un terme correctif en $(Z/137)^4$, alors que nous nous limitons ici à l'ordre $(Z/137)^3$.

Pour les mêmes raisons, nous prenons :

$$A_3 \simeq \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{q})}{q} \frac{\alpha_e (\vec{\alpha} \cdot \vec{q})}{2} \cdot A_1$$

Compte tenu de : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, nous avons donc finalement :

$$A_1 = \frac{2\pi^2}{q} \quad ; \quad A_2 \simeq 0 \quad ; \quad A_3 \simeq \frac{2\pi^2}{q} \cdot \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{q})}{q} \frac{\alpha_e (\vec{\alpha} \cdot \vec{q})}{2}$$

APPENDICE B

Sommations sur les spins des électrons et la polarisation du photon.

1. Considérons les opérateurs A et B formés à l'aide des matrices de Dirac $\vec{\alpha}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ et β . Nous avons (voir par exemple⁽²⁹⁾ p. 108) :

$$S_1 S_2 \langle u_1 | A^+ | u_2 \rangle \cdot \langle u_2 | B | u_1 \rangle = \frac{1}{E_1 E_2} \cdot \frac{1}{4} \text{Tr} [A^+ (E_2 + H_2) B (E_1 - H_1)]$$

où : S_1 et S_2 désignent les sommations sur les spins du positon et du négaton respectivement ;

$$H_2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 + \beta ;$$

$$H_1 = -\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1 + \beta.$$

Nous sommes donc conduits à calculer les traces de produits de matrices de Dirac. Ces traces peuvent être obtenues sans faire appel aux représentations matricielles de $\alpha_x, \dots, \beta$, étant données les règles suivantes que l'on obtient facilement à partir des propriétés des matrices $\alpha_x, \dots, \beta$:

- s'il y a un nombre impair de l'une ou l'autre des matrices $\alpha_x, \dots, \beta$, la trace est nulle ;
- soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \dots$ des vecteurs fixes :

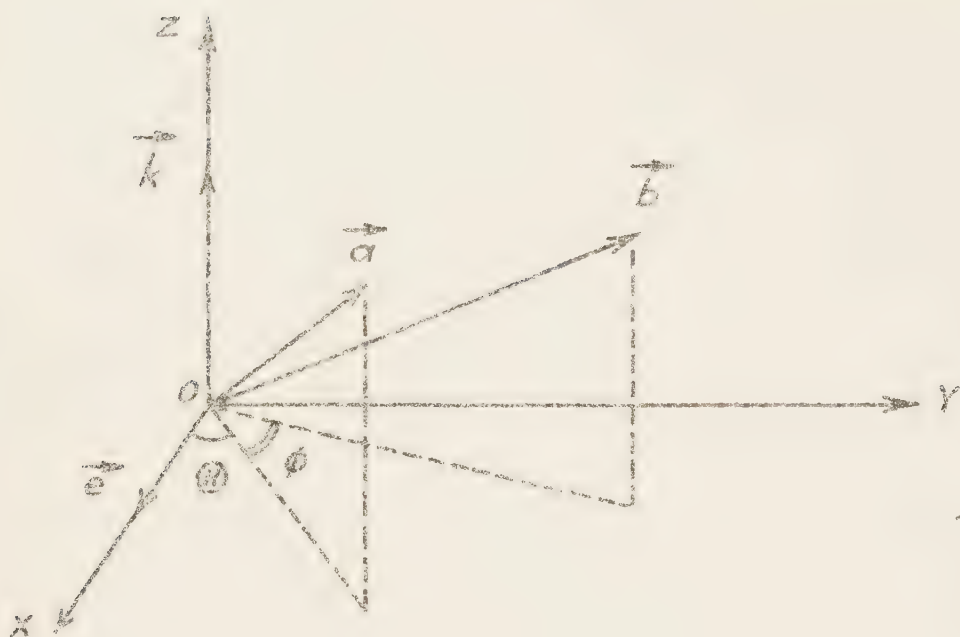
$$\text{Tr}_r (\vec{\alpha} \cdot \vec{a}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{b}) = 4 \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\text{Tr}_r (\vec{\alpha} \cdot \vec{a}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{b}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{c}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{d}) = 4(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d}) - 4(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) + 4(\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

etc...

De plus, de façon générale, la trace d'un produit de matrices ne change pas si on effectue une permutation circulaire sur les matrices, ou si l'ordre de l'ensemble des matrices est inversé.

Figure 1.17



Nous donnons à titre d'exemple le calcul correspondant à la formule (1.64) :

$$A \equiv Q = I_1 \vec{\alpha} \cdot \vec{e} + (\vec{\alpha} \cdot \vec{e})(\vec{\alpha} \cdot \vec{I}_2) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{I}_3)(\vec{\alpha} \cdot \vec{e})$$

$$B \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{e}$$

Nous prenons l'axe des x suivant le vecteur $\vec{e}$, soit $\vec{\alpha} \cdot \vec{e} = \alpha_x$.
D'où successivement, compte tenu des propriétés des matrices de Dirac :

$$Q^+ = I_1^* \alpha_x + \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_2^* \alpha_x + \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_3^*$$

$$Q^+ \alpha_x = I_1^* + \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_2^* + \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_3^* \alpha_x$$

$$Q^+ \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x = I_1^* \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x + \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_2^* \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x + \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_3^* \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x$$

$$Q^+ \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1 = I_1^* \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_2^* \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1 + \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_3^* \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1$$

$$Q^+ \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1 = I_1^* \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_2^* \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1 + \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{I}_3^* \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1$$

$$\frac{1}{4} \text{Tr} [Q^+ (E_2 + H_2) \alpha_x (E_1 - H_1)] =$$

$$= E_1 E_2 \cdot \frac{1}{4} \text{Tr} (Q^+ \alpha_x) + E_1 \cdot \frac{1}{4} \text{Tr} (Q^+ \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x) + E_2 \cdot \frac{1}{4} \text{Tr} (Q^+ \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1)$$

$$+ \frac{1}{4} \text{Tr} (Q^+ \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_2 \alpha_x \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_1) + \frac{1}{4} \text{Tr} (Q^+ \alpha_x) =$$

$$= I_1^* (E_1 E_2 + 1) + E_1 \vec{p}_2 \cdot \vec{I}_3^* + E_2 \vec{p}_1 \cdot \vec{I}_2^* + E_1 (2 I_{2x}^* p_{2x} - \vec{p}_2 \cdot \vec{I}_2^*)$$

$$+ E_2 (2 I_{3x}^* p_{1x} - \vec{p}_1 \cdot \vec{I}_2^*) + I_1^* (2 p_{1x} p_{2x} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$$

2. Il reste à moyenner sur la polarisation du photon incident. Considérons 2 vecteurs quelconques $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (figure 1.17). On a :

$$(\vec{e} \cdot \vec{a})(\vec{e} \cdot \vec{b}) = a \cos \theta \cdot b \cos (\phi + \theta)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\vec{e} \cdot \vec{a})(\vec{e} \cdot \vec{b})}{2\pi} \cdot d\theta = \frac{1}{2} ab \cos \phi$$

Notons S_e la moyenne sur la direction de polarisation :

$$S_e 2(\vec{e} \cdot \vec{a})(\vec{e} \cdot \vec{b}) = S_e 2a_x b_x = \vec{a} \cdot \vec{b} - a_z b_z$$

Dans l'exemple précédent, on aboutit facilement à la relation (1.65).

APPENDICE C

Construction du programme pour le calcul de σ_{BM} à partir de la formule (1.45).

1. On donne $Z, k, y = (E_1 - 1) / (k - 2)$. D'où :

$$E_1 = 1 + y(k - 2) \quad ; \quad E_2 = k - E_1$$

$$p_1 = \sqrt{E_1^2 - 1} \quad ; \quad p_2 = \sqrt{E_2^2 - 1}$$

$$a = Z/137 \quad ; \quad a_1 = a \cdot E_1/p_1 \quad ; \quad a_2 = a \cdot E_2/p_2$$

$$\mu = k^2 - (p_1 + p_2)^2$$

$$\alpha = a_1 a_2 \quad ; \quad \beta = a_2 - a_1 \quad ; \quad \alpha_0 = \alpha + 2$$

$$\alpha_1 = \alpha + 1 \quad ; \quad \alpha_2 = \alpha + 4 \quad ; \quad \alpha_3 = \alpha + 9$$

(ne pas confondre les notations actuelles $\alpha, \dots, \beta$ introduites pour les calculs numériques, avec les matrices de Dirac).

$$V_{11} = \alpha \quad ; \quad W_{11} = \alpha_1/2 \quad ; \quad W_{21} = \beta/2$$

$$V_{12} = \alpha \cdot W_{11}/2 \quad ; \quad V_{22} = \alpha \cdot W_{21}/2 \quad ; \quad W_{12} = (\alpha_1 \alpha_2 - 2\beta^2)/12 \quad ; \quad W_{22} = \beta \cdot \alpha_0/4$$

$$V_{13} = \alpha \cdot W_{12}/3 \quad ; \quad V_{23} = \alpha \cdot W_{22}/3 \quad ; \quad W_{13} = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \beta^2(11\alpha + 36))/144 \quad ;$$

$$W_{23} = \beta(\alpha_0 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 - 2\beta^2)/48$$

(V_{ij} et W_{ij} facteurs des développements $V_{12}(x)$ et $W_{12}(x)$; $i = 1, 2$ pour partie réelle ou imaginaire)

$$C_0 = |N_1 N_2|^2 = \frac{4\pi^2 a_1 a_2}{(e^{2\pi a_1} - 1) \cdot (1 - e^{-2\pi a_2})}$$

2. On donne θ_1 . D'où :

$$p_{1\perp} = p_1 \sin\theta_1 ; p_{1z} = p_1 \cos\theta_1 ; D_1 = 2k(E_1 - p_{1z})$$

3. On donne θ_2 . D'où :

$$p_{2\perp} = p_2 \sin\theta_2 ; p_{2z} = p_2 \cos\theta_2 ; D_2 = 2k(E_2 - p_{2z})$$

$$q_z = k - p_{1z} - p_{2z} ; P_z = p_2 \cdot p_{1z} - p_1 \cdot p_{2z}$$

$$A = 1/D_1 D_2 ; B_1 = A(\mu/D_1 - 1) ; B_2 = A(\mu/D_2 - 1)$$

$$A_1 = A/p_1 ; A_2 = A/p_2 ; H_1 = (E_1 E_2 + 1 - p_{1z} p_{2z})/2 ; H_2 = E_1 E_2 - H_1$$

4. On donne ϕ . D'où :

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_{1z} p_{2z} + p_{1\perp} \cdot p_{2\perp} \cos\phi$$

$$q^2 = k^2 + p_1^2 + p_2^2 - 2k(p_{1z} + p_{2z}) + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

$$\vec{q} \cdot \vec{p}_1 = k p_{1z} - p_1^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 ; \vec{q} \cdot \vec{p}_2 = k p_{2z} - p_2^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

$$p = p_1 p_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p} = p \cdot p_1 ; \vec{p}_2 \cdot \vec{p} = -p \cdot p_2 ; p^2 = 2 \cdot p \cdot p_1 \cdot p_2 ; \vec{q} \cdot \vec{p} = p_2 \cdot \vec{q} \cdot \vec{p}_1 - p_1 \cdot \vec{q} \cdot \vec{p}_2$$

$$H_3 = E_1 E_2 - 1 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 ; H_4 = \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - p_{1z} \cdot p_{2z}$$

$$x = 1 - q^2 \mu A ; C_1 = 1/q^2 \cdot D_1 ; C_2 = 1/q^2 \cdot D_2$$

$$V_1 = 1 + \sum_{n=1}^3 V_{1n} \cdot x^n ; V_2 = \sum_{n=2}^3 V_{2n} \cdot x^n$$

$$W_1 = 1 + \sum_{n=1}^3 W_{1n} \cdot x^n ; W_2 = - \sum_{n=1}^3 V_{2n} \cdot x^n$$

$$(\text{on a posé : } V_{12}(x) = V_1 + iV_2 ; W_{12}(x) = W_1 - iW_2)$$

$$J_1^{(v)} = 2 \cdot (E_2 \cdot C_1 - E_1 \cdot C_2) ; J_1^{(w)} = 2 \cdot (a_1 E_2 B_1 + a_2 E_1 B_2)$$

$$(\text{on a posé } J_1 = V_{12} \cdot J_1^{(v)} + i \cdot W_{12} \cdot J_1^{(w)})$$

$$J_{11} = V_1 \cdot J_1^{(v)} + W_2 \cdot J_1^{(w)} ; J_{12} = V_2 \cdot J_1^{(v)} + W_1 \cdot J_1^{(w)}$$

$$\begin{cases} J_{21}^{(q)} = -V_1 \cdot C_2 + a_2 \cdot W_2 B_2 ; J_{21}^{(p)} = a_2 W_2 A_1 \\ J_{22}^{(q)} = -V_2 \cdot C_2 + a_2 W_1 B_2 ; J_{22}^{(p)} = a_2 W_1 A_1 \end{cases}$$

(on a posé : $\vec{J}_2 = \vec{q}(J_{21}^{(q)} + iJ_{22}^{(q)}) + \vec{p}(J_{21}^{(p)} + iJ_{22}^{(p)})$, d'où

$$\vec{J}_{2v} = \vec{q} \cdot J_{2v}^{(q)} + \vec{p} \cdot J_{2v}^{(p)} \text{ avec } v = 1, 2)$$

$$\begin{cases} J_{31}^{(q)} = V_1 C_1 + a_1 W_2 B_1 ; J_{31}^{(p)} = -a_1 \cdot W_2 A_2 \\ J_{32}^{(q)} = V_2 C_1 + a_1 W_1 B_1 ; J_{32}^{(p)} = -a_1 \cdot W_1 A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{J}_{iv}^2 = q^2 \cdot (J_{iv}^{(q)})^2 + p^2 \cdot (J_{iv}^{(p)})^2 + 2\vec{q} \cdot \vec{p} \cdot J_{iv}^{(q)} \cdot J_{iv}^{(p)} \\ \vec{J}_{2v} \cdot \vec{J}_{3v} = q^2 \cdot J_{2v}^{(q)} \cdot J_{3v}^{(q)} + p^2 \cdot J_{2v}^{(p)} \cdot J_{3v}^{(p)} + \vec{q} \cdot \vec{p} (J_{2v}^{(q)} \cdot J_{3v}^{(p)} + J_{2v}^{(p)} \cdot J_{3v}^{(q)}) \\ J_{izv} = q_z \cdot J_{iv}^{(q)} + p_z \cdot J_{iv}^{(p)} \\ \vec{p}_j \cdot \vec{J}_{iv} = \vec{q} \cdot \vec{p}_j \cdot J_{iv}^{(q)} + \vec{p}_j \cdot \vec{p} \cdot J_{iv}^{(p)} \end{cases}$$

avec $i = 2, 3 ; v = 1, 2 ; j = 1, 2$

5. On peut alors calculer $d\sigma_{BM}$, d'après (1.45) où on abandonne un terme : $Z^2 e^6 \cdot dE_1 \cdot d\theta_1 \cdot d\theta_2 \cdot d\phi$:

$$\begin{aligned} d\sigma_{BM} \sim & \frac{4p_{1\perp} \cdot p_{2\perp} C_0}{\pi k} \cdot \sum_{v=1}^2 \{ H_1 \cdot J_{1v}^2 + H_2 \cdot (\vec{J}_{2v}^2 + \vec{J}_{3v}^2) - H_3 \cdot J_{2zv} \cdot J_{3zv} \\ & + p_{1z} \cdot J_{3zv} \cdot [\vec{p}_2 \cdot \vec{J}_{2v} - \vec{p}_2 \cdot \vec{J}_{3v}] - p_{2z} \cdot J_{2zv} [\vec{p}_1 \cdot \vec{J}_{2v} - \vec{p}_1 \cdot \vec{J}_{3v}] + \\ & + \vec{p}_2 \cdot \vec{J}_{3v} \cdot \vec{p}_1 \cdot \vec{J}_{2v} - \vec{p}_2 \cdot \vec{J}_{2v} \cdot \vec{p}_1 \cdot \vec{J}_{3v} + J_{1v} \cdot [E_2 (\vec{p}_1 \cdot \vec{J}_{2v} - p_{1z} \cdot J_{3zv}) + E_1 \cdot \\ & \cdot (\vec{p}_2 \cdot \vec{J}_{3v} - p_{2z} \cdot J_{2zv})] + H_4 \cdot \vec{J}_{2v} \cdot \vec{J}_{3v} \} \end{aligned}$$

6. On intègre par la méthode de Simpson. D'où :

$$\sigma_{BM} = \int_{\theta_1, \theta_2, \phi} d\sigma_{BM}$$

Figure 1.18.

$$Z=13; \phi=\pi; k=25$$

$$\text{---} y=0,1; \theta_1=0,2$$

$$\text{---} y=0,5; \theta_1=0,1$$

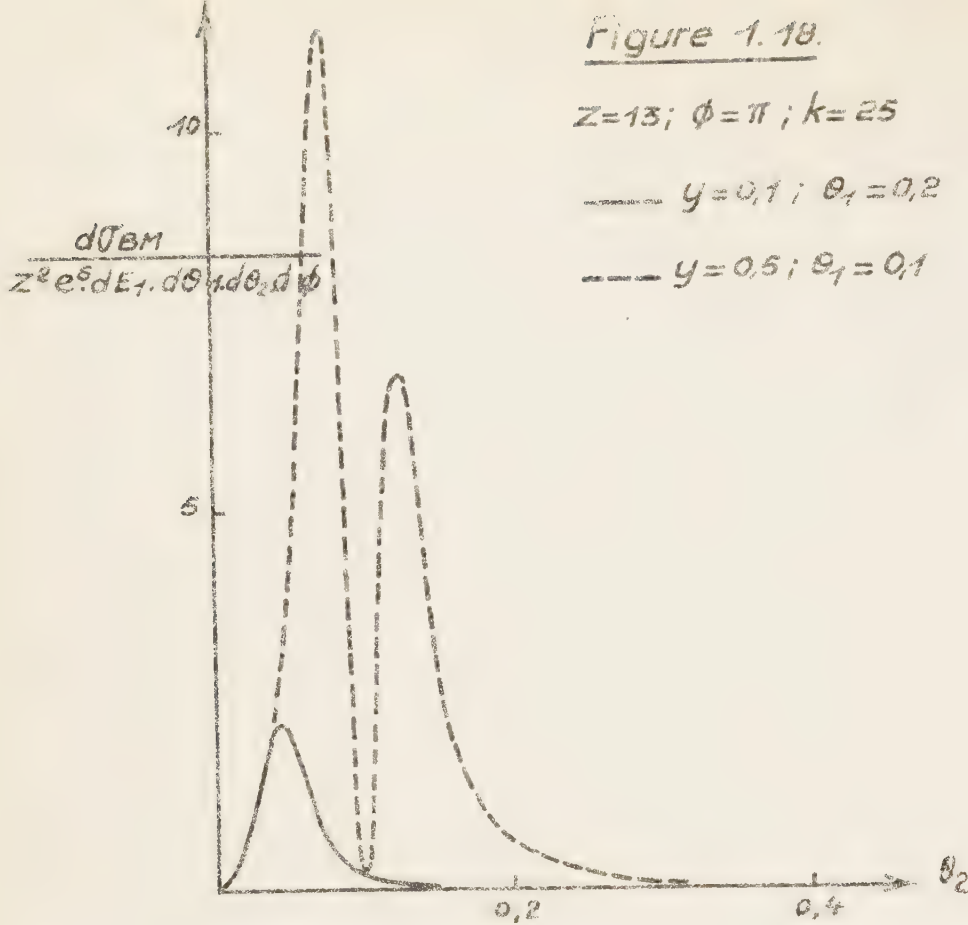


Figure 1.19.

$$Z=13$$

$$\text{---} k=5,2; y=0,1; \theta_1=0,6; \theta_2=0,2$$

$$\text{---} k=5,2; y=0,5; \theta_1=0,4; \theta_2=0,4$$

$$\text{---} k=12; y=0,1; \theta_1=0,3; \theta_2=0,2$$

$$\text{---} k=25; y=0,1; \theta_1=0,2; \theta_2=0,15$$

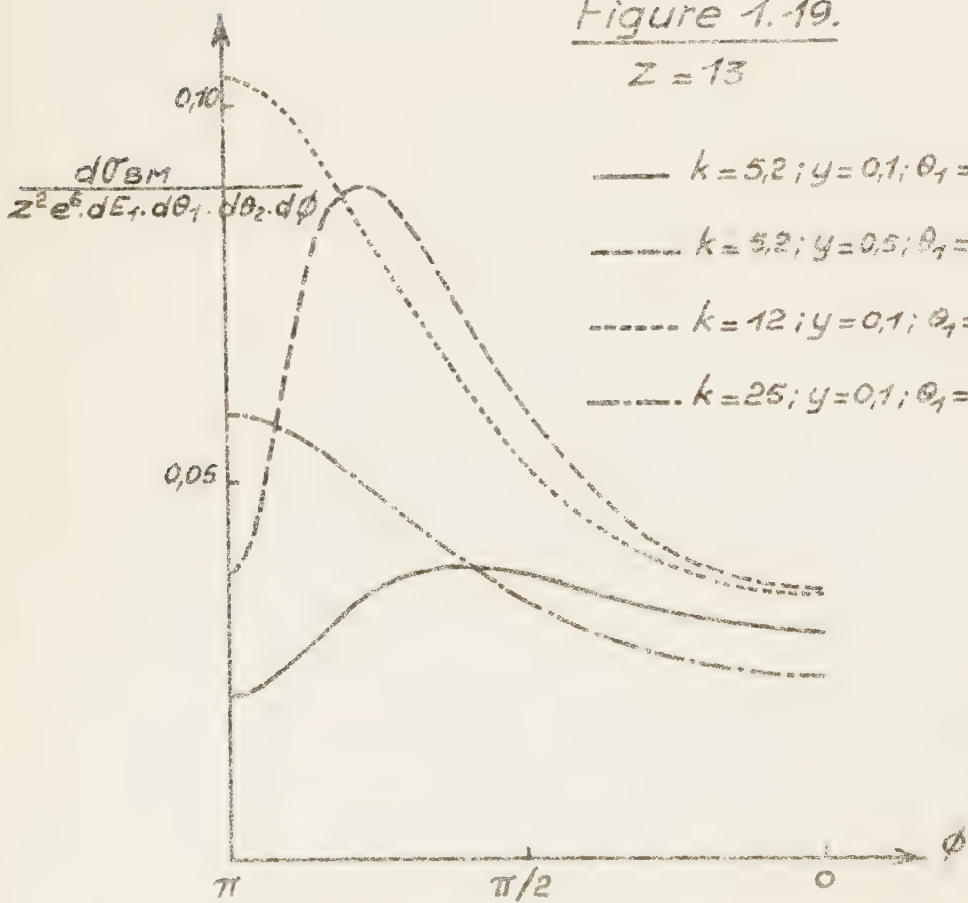


Figure 1.18.

$$Z=13; \phi=\pi; k=25$$

$$\text{--- } y=0,1; \theta_1=0,2$$

$$\text{--- } y=0,5; \theta_1=0,1$$

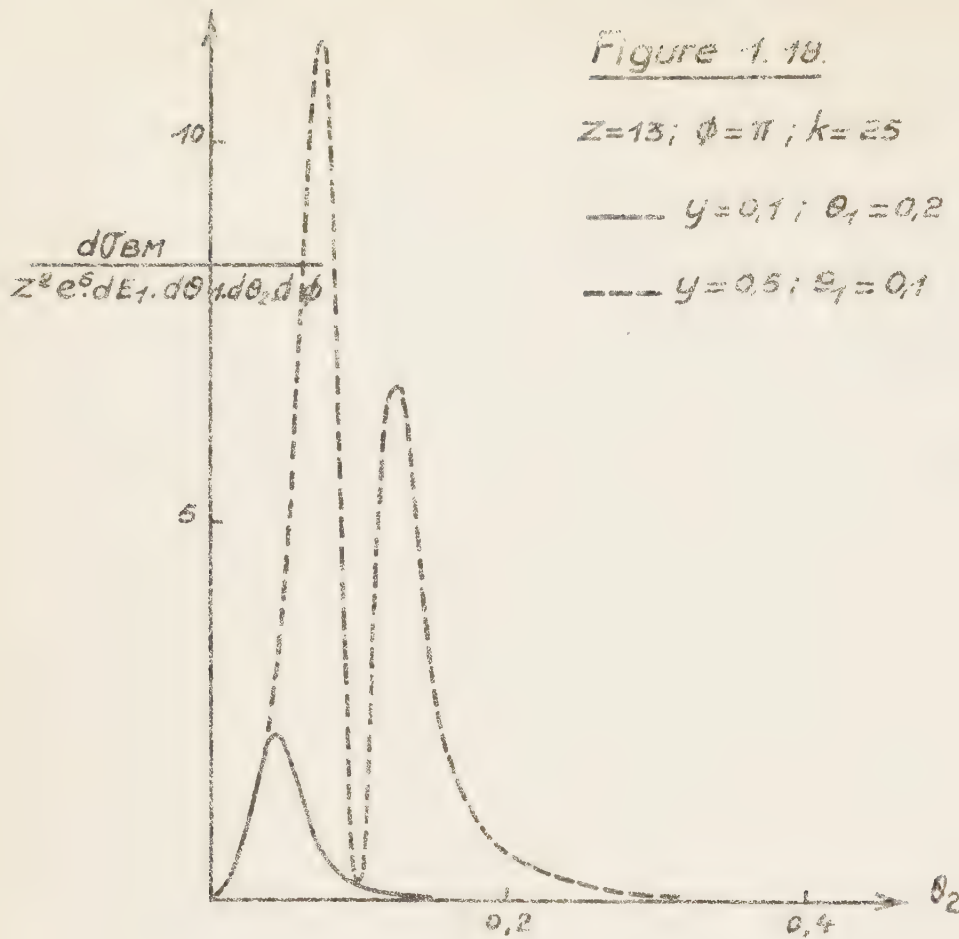


Figure 1.19.

$$Z=13$$

$$\text{--- } k=5,2; y=0,1; \theta_1=0,6; \theta_2=0,2$$

$$\text{--- } k=5,2; y=0,5; \theta_1=0,4; \theta_2=0,4$$

$$\text{--- } k=12; y=0,1; \theta_1=0,3; \theta_2=0,2$$

$$\text{--- } k=25; y=0,1; \theta_1=0,2; \theta_2=0,15$$

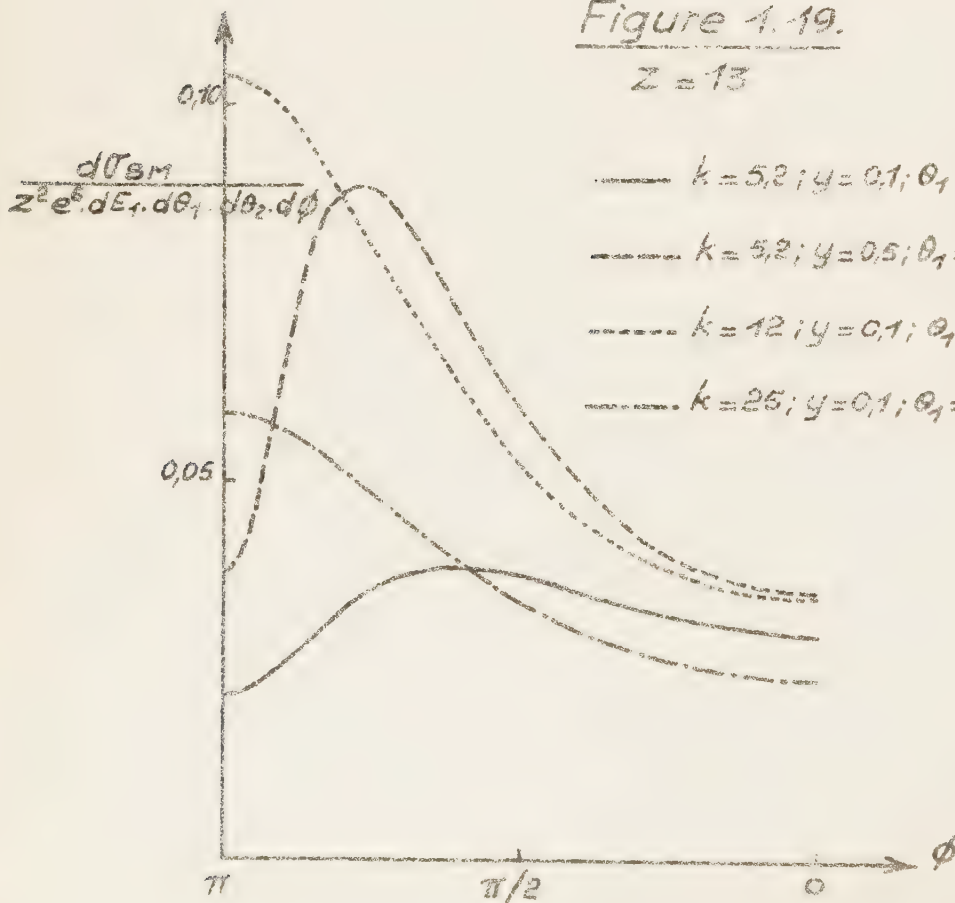
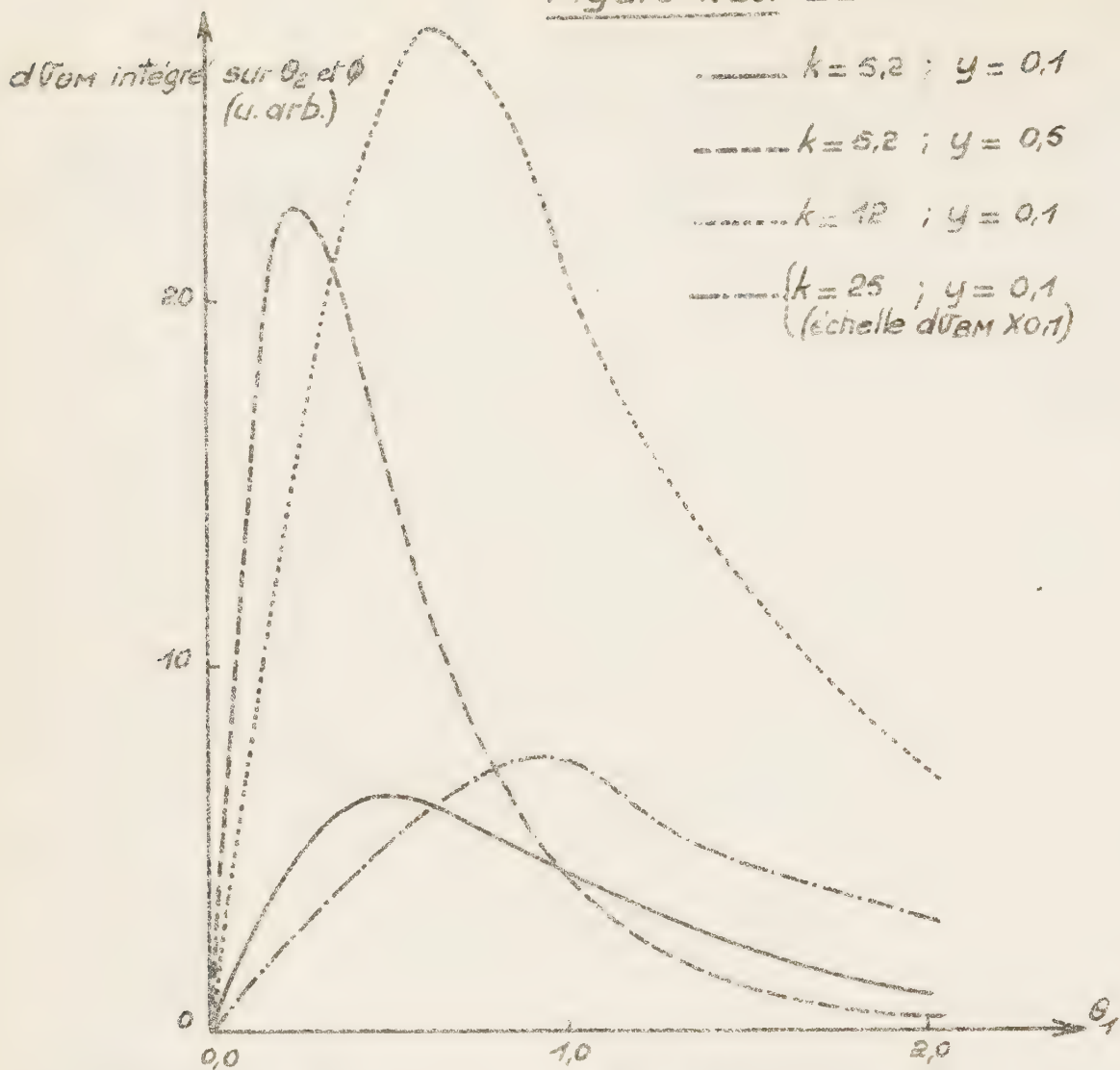
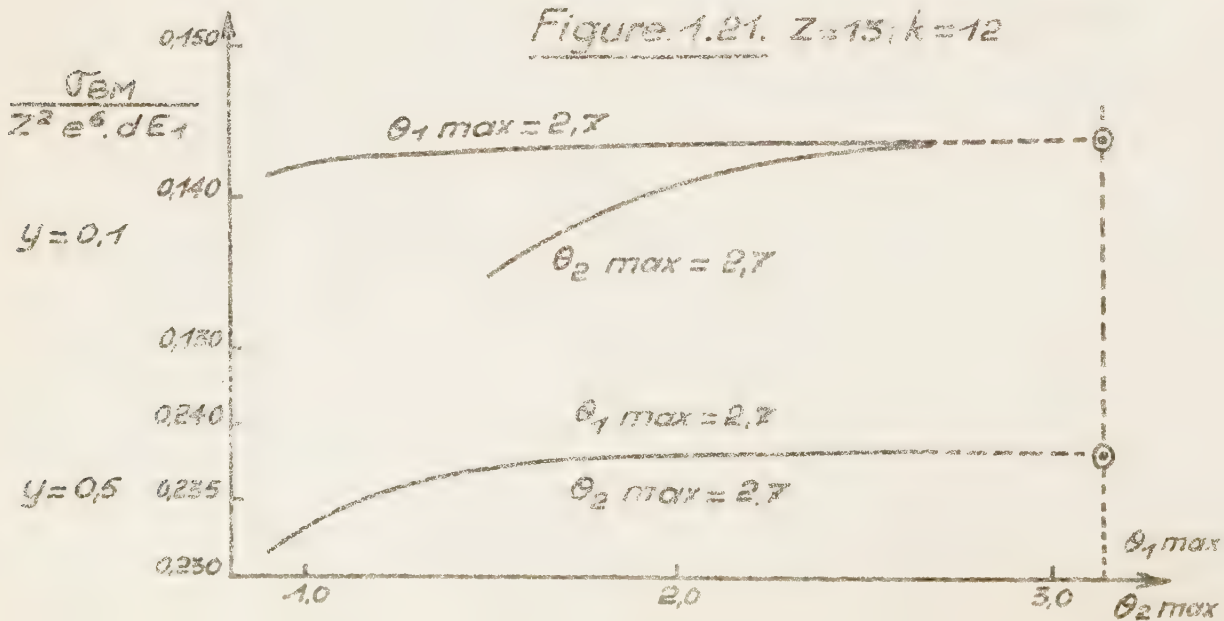


Figure 1.20. $Z=13$



l'échelle des θ_1 est valable pour $k=5,2$. Pour $k=12$, échelle $\times 2$;
 $k=25$, échelle $\times 4$.

Figure 1.21. $Z=13, k=12$



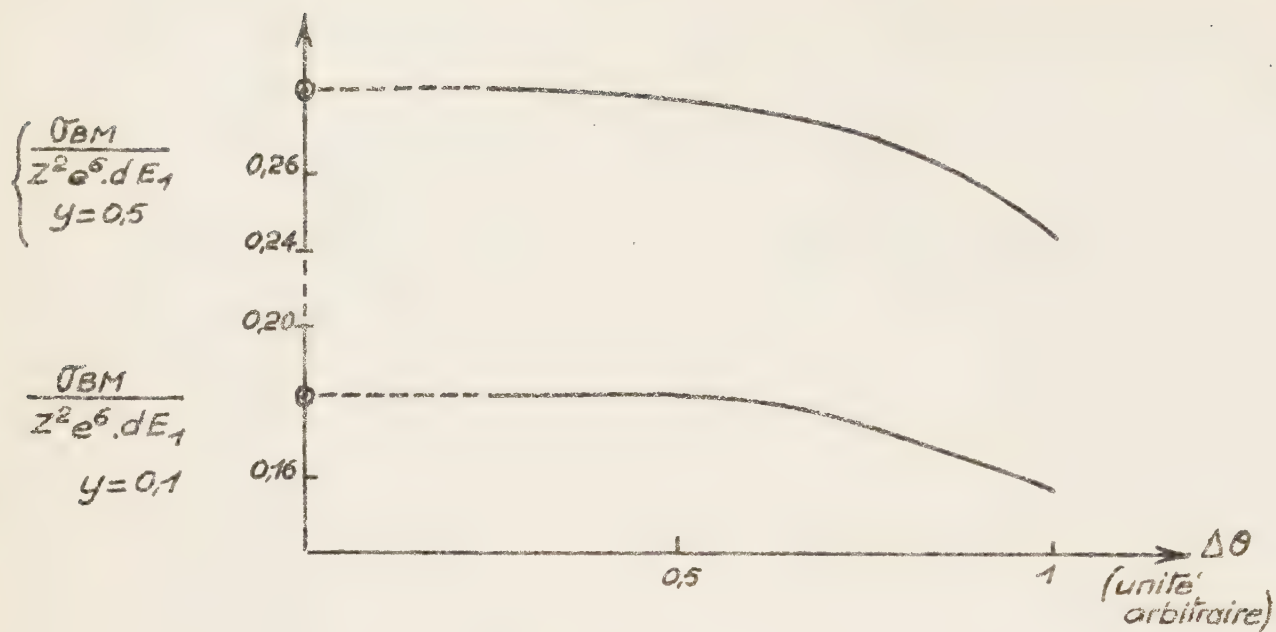
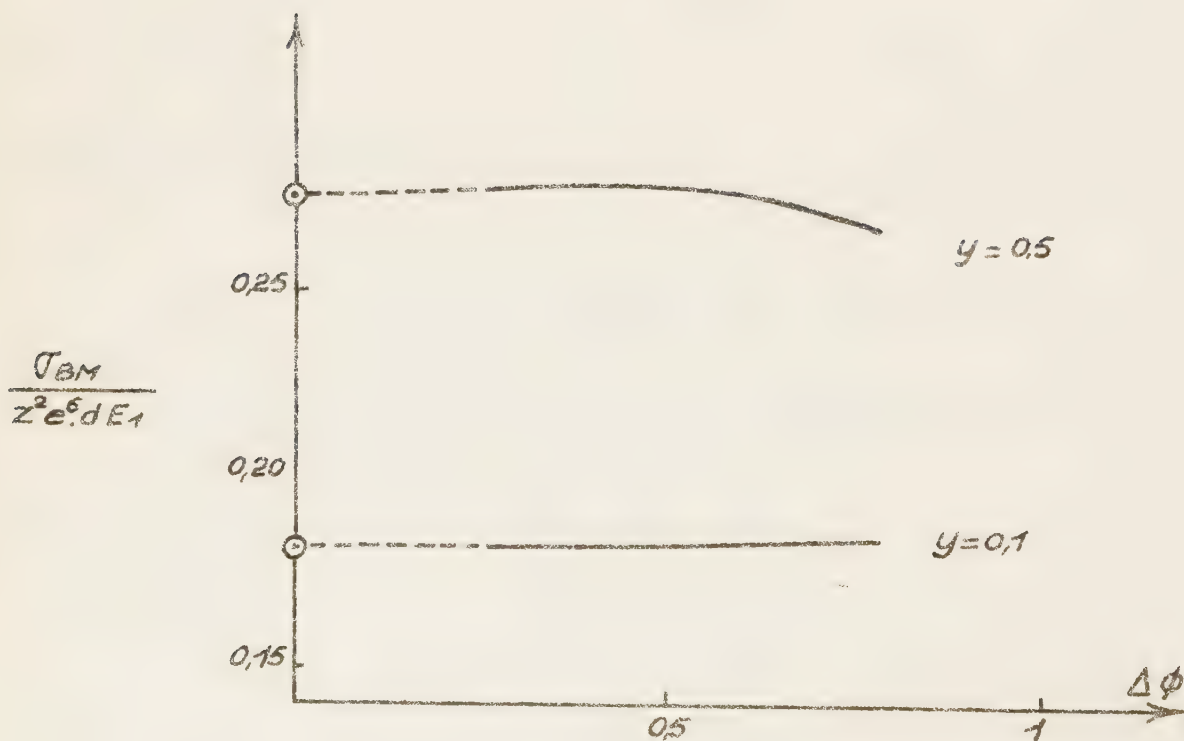


Figure 1.22. $k=12$; $Z=13$.



APPENDICE D

- Intégrations angulaires -

1. Section efficace de Bethe et Maximon (1.45).

Une première étape de l'étude numérique de l'intégrale consiste à calculer $d\sigma_{BM}(Z, k, y, \theta_1, \theta_2, \phi)$ en fonction de l'une des variables angulaires, les autres variables étant fixées. Nous avons posé :

$$y = \frac{E_1 - 1}{k - 2}$$

Les figures 1.18 et 1.19 donnent $d\sigma_{BM}$ en fonction de θ_2 et de ϕ , les autres paramètres ayant les valeurs indiquées sur les courbes. La figure 1.20 montre $d\sigma_{BM}$, intégré (de façon approchée) sur θ_2 et ϕ , en fonction de θ_1 . L'allure des courbes est conforme à celle donnée par la formule de Bethe-Heitler (1.20), ce qui permet de vérifier la bonne marche des calculs.

La deuxième étape consiste à déterminer les limites d'intégration. La figure 1.19 montre que sur ϕ les limites sont obligatoirement π et 0 (la section efficace est une fonction paire de l'angle ϕ). Par contre, on voit sur les figures 1.18 et 1.20, que la limite supérieure sur θ_1 et θ_2 peut être inférieure à π , et d'autant plus que k est grand. La figure 1.21 donne σ_{BM} en fonction de l'une des limites d'intégration, l'autre étant fixée. On a constaté que les limites indiquées dans le tableau 1.1 permettent d'obtenir σ_{BM} avec une erreur relative par défaut inférieure à 1 %, le plus souvent très inférieure à 1 % (c'est le cas en particulier pour $y = 0,5$, quel que soit k).

Une troisième étape nous permet de fixer le nombre de pas d'intégration de façon à ce que les intégrales convergent avec une précision suffisante. Nous avons porté sur la figure 1.22 des courbes donnant σ_{BM} , calculé avec les limites du tableau 1.1, en fonction des intervalles d'intégration $\Delta\theta$, $\Delta\phi$, l'un de ces intervalles étant fixé. Les valeurs du tableau 1.2 permettent d'obtenir une erreur relative dans tous les cas inférieure à 1 % et le plus souvent très inférieure à 1 % (c'est le cas par exemple pour $y = 0,1$, pratiquement quel que soit k).

Tableau 1.1 : limites d'intégration

k	y	$\theta_{1,max}$	$\theta_{2,max}$	y	$\theta_{1,max}$	$\theta_{2,max}$
5,2	0,1	2,8	2,0	0,9	2,0	2,8
	0,3	2,6	2,2	0,7	2,2	2,6
	0,5	2,4	2,4			
12	0,1	2,4	1,5	0,9	1,5	2,4
	0,3	2,1	1,65	0,7	1,65	2,1
	0,5	1,8	1,8			
25	0,1	2,0	0,8	0,9	0,8	2,0
	0,3	1,6	1,0	0,7	1,0	1,6
	0,5	1,2	1,2			

Tableau 1.2 : pas d'intégration

k	y	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\phi$	y	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\phi$
5,2	0,1	0,175	0,125	0,523	0,9	0,125	0,175	0,523
	0,3	0,162	0,137	"	0,7	0,137	0,162	"
	0,5	0,150	0,150	"				
12	0,1	0,075	0,047	0,392	0,9	0,047	0,075	0,392
	0,3	0,065	0,051	"	0,7	0,051	0,065	"
	0,5	0,056	0,056	"				
25	0,1	0,041	0,016	0,261	0,9	0,016	0,041	0,261
	0,3	0,033	0,020	"	0,7	0,020	0,033	"
	0,5	0,025	0,025	0,174				

Figure 1.23

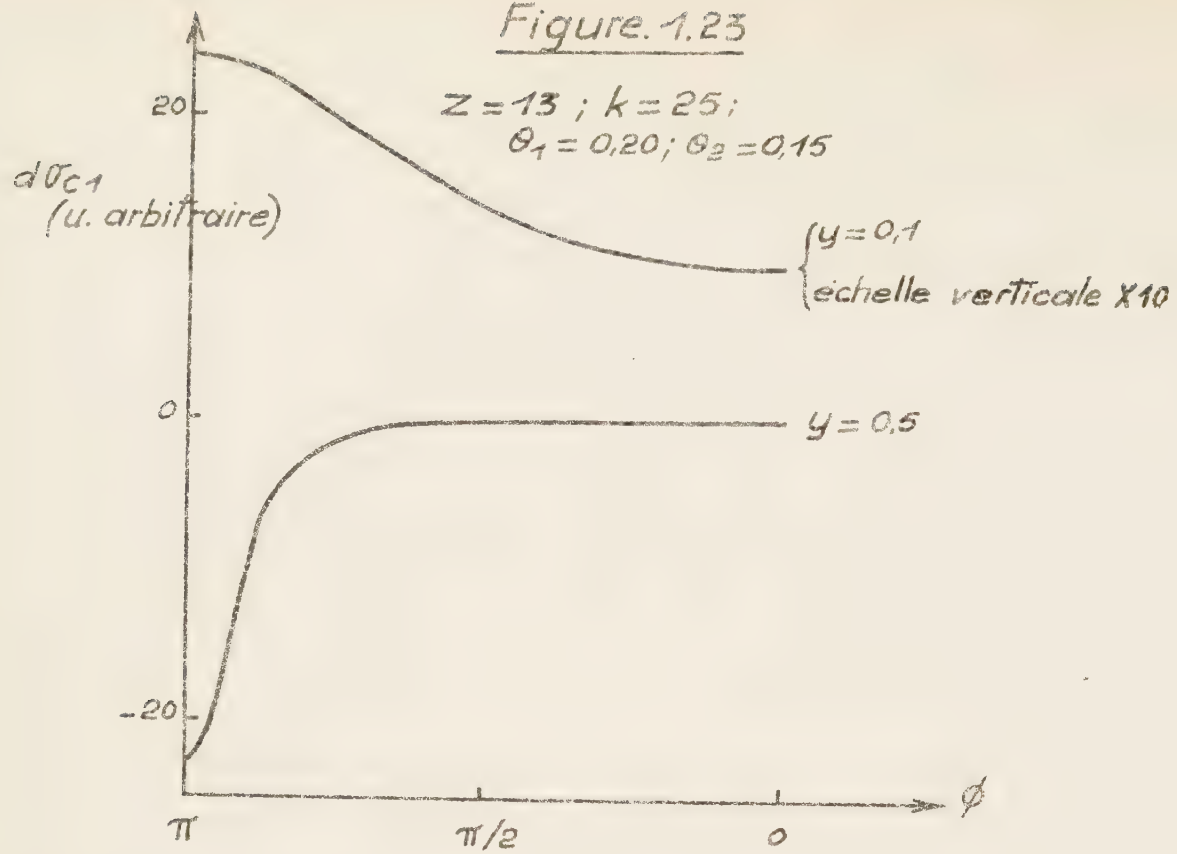


Figure 1.24

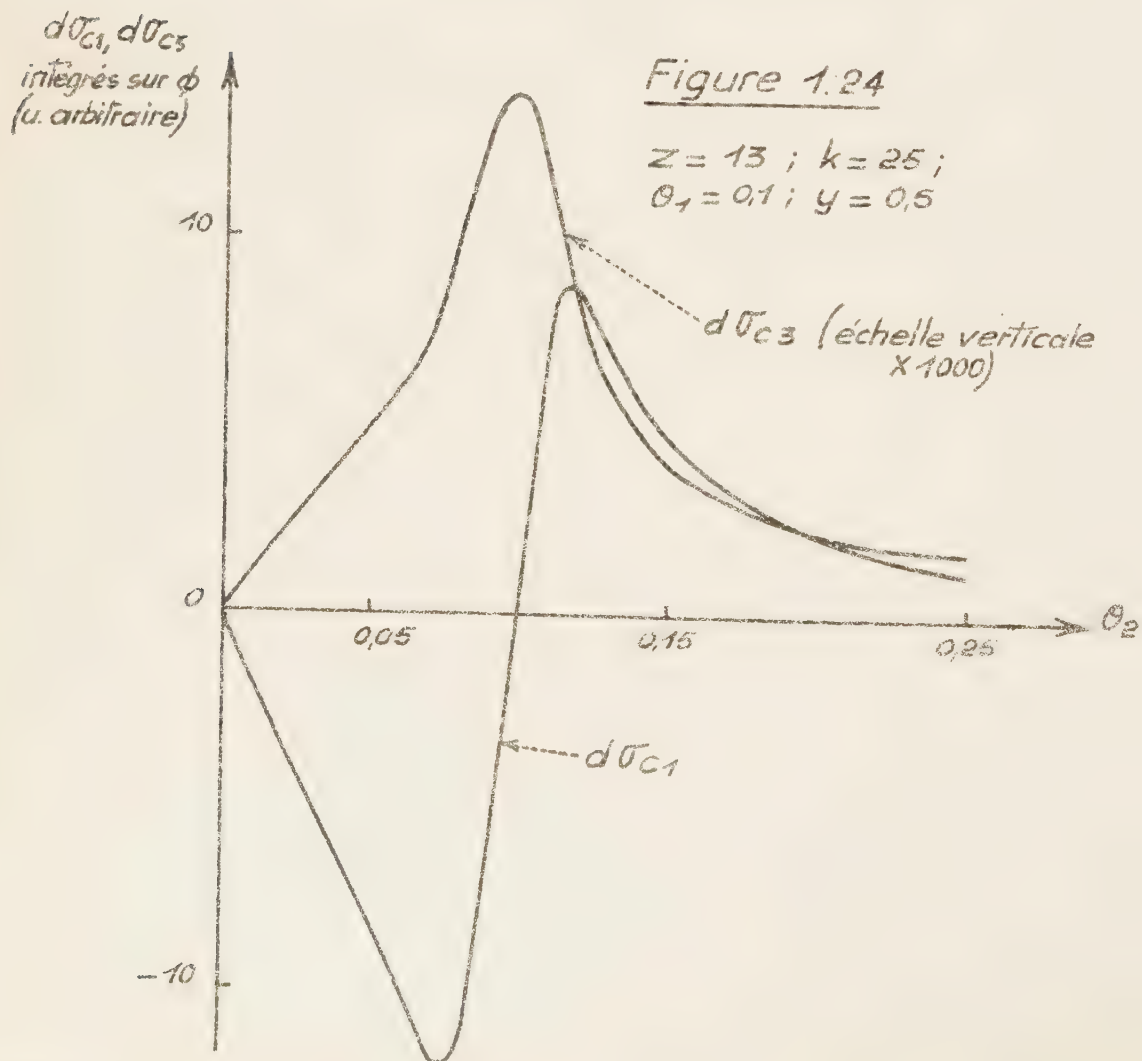


Figure 1.25

$d\sigma_{c1}, d\sigma_{c3}$ intégrés
sur ϕ et θ_2
(u. arbitraire)

$z = 13; k = 25;$

$y = 0,1.$

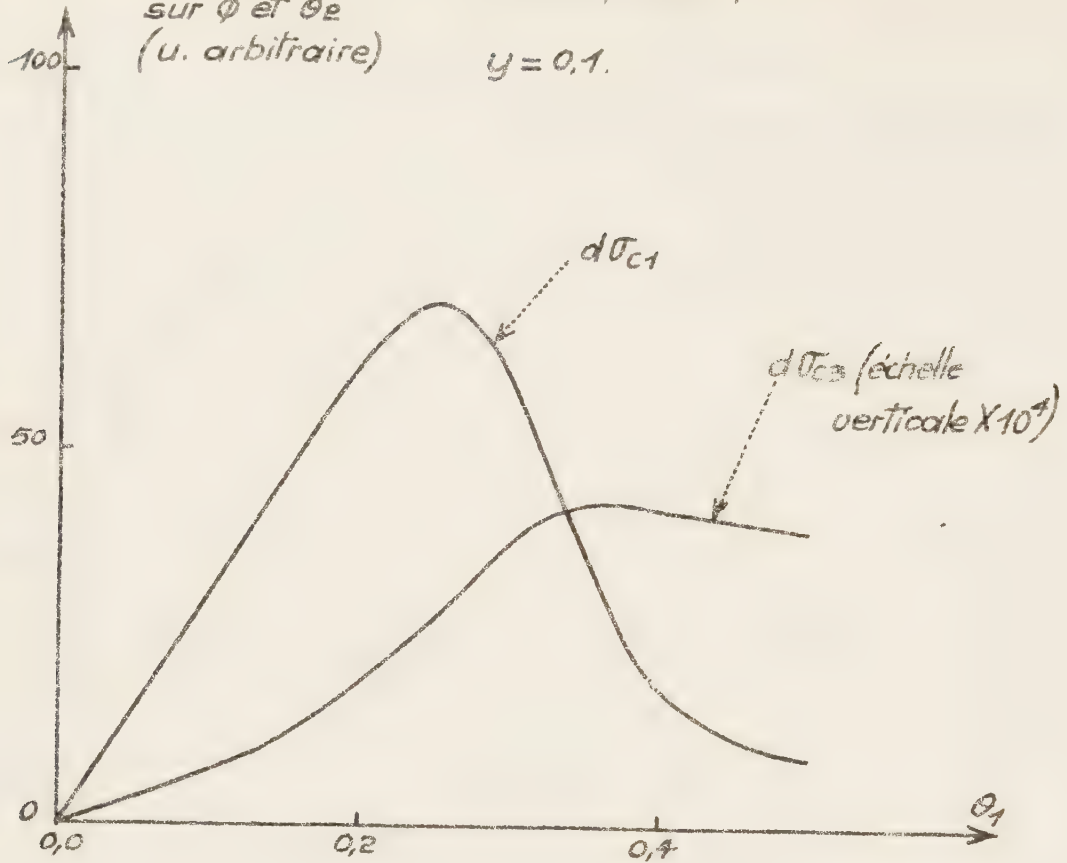
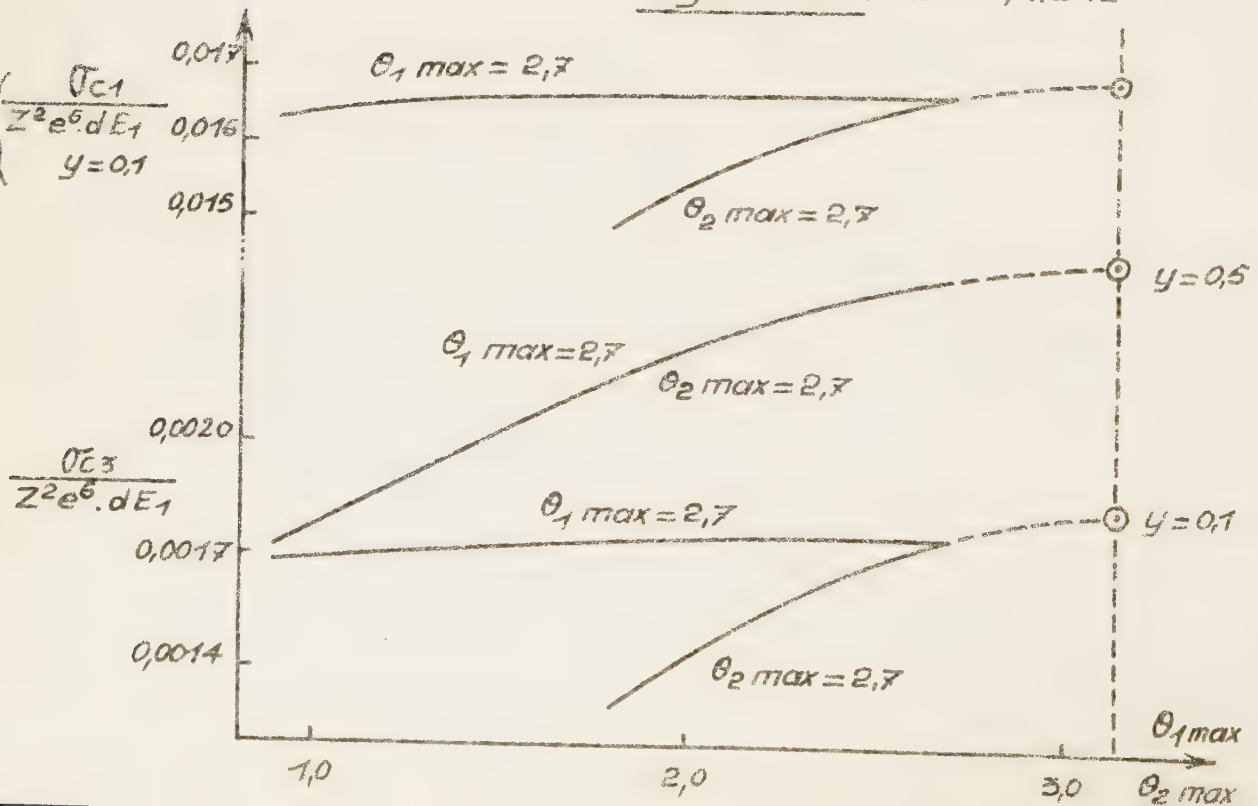


Figure 1.26. $z=13; k=12$



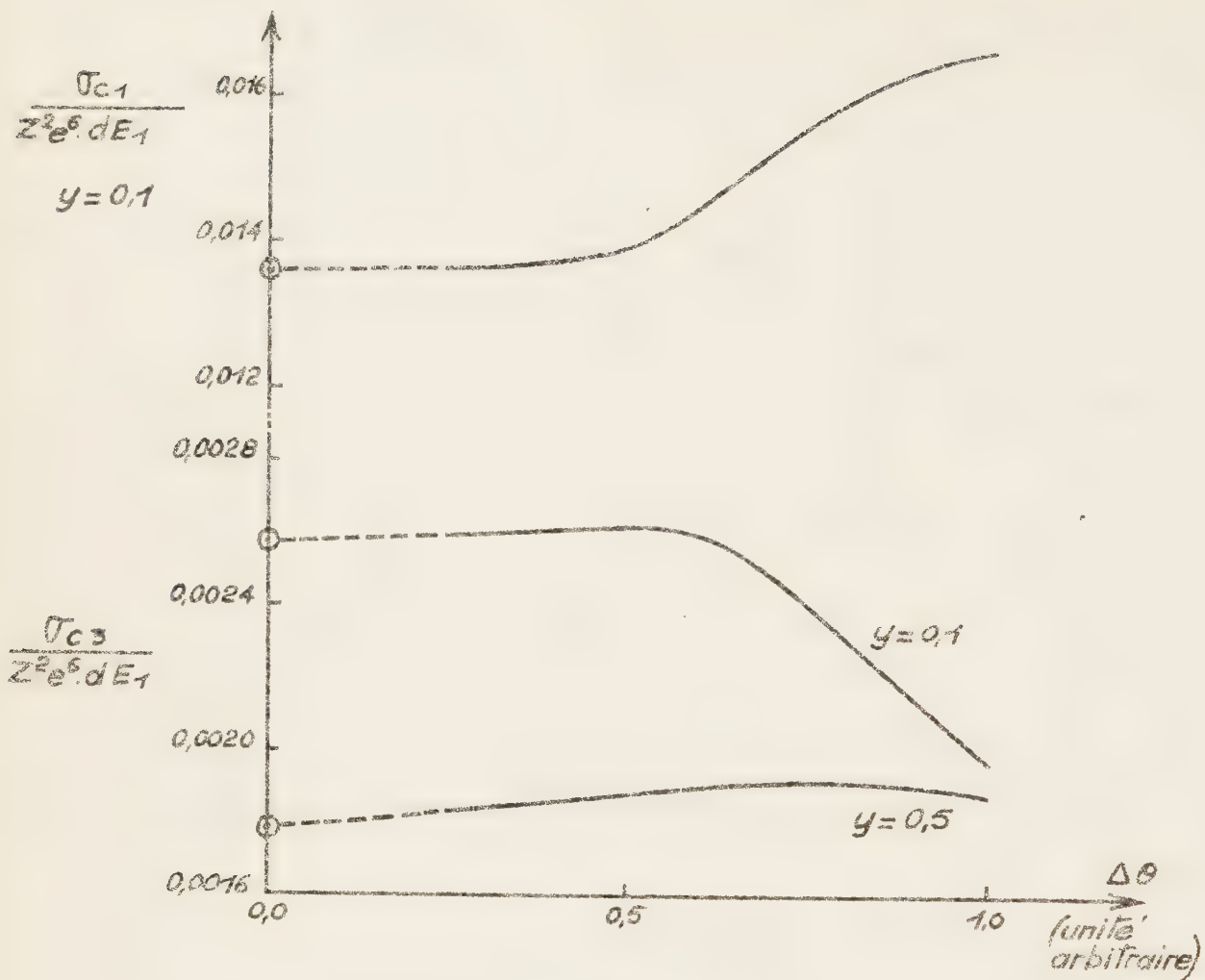
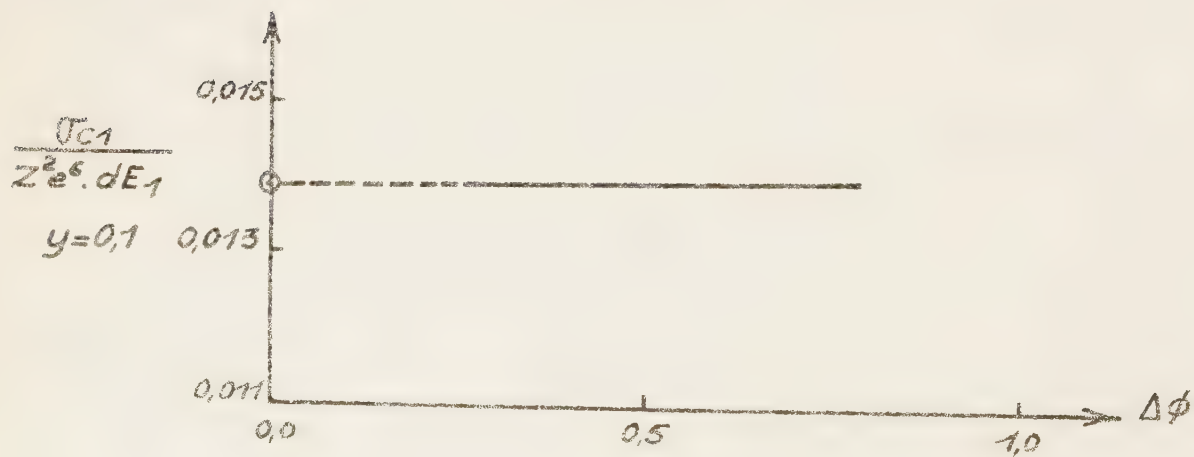


Figure 1.27. $k=12; Z=13.$



Finalement, l'erreur de calcul due aux 2 causes signalées est toujours inférieure à 1 % (ou voisine de 1 %).

La durée de calcul sur CDC 6600 n'est pas excessive. Avec les limites et les intervalles d'intégration des tableaux 1.1 et 1.2, les temps de calcul τ d'une valeur de σ_{BM} sont :

$$\tau < 10 \text{ s pour } k = 5,2;$$

$$\tau < 20 \text{ s pour } k = 12 ;$$

$$\tau < 40 \text{ s pour } k = 25 .$$

On remarque dans les formules de l'appendice C, ^{que} beaucoup de termes ne dépendent pas de Z. Ceci a été mis à profit : un même programme permet le calcul de σ_{BM} pour plusieurs valeurs de Z dans le même temps τ que pour une valeur.

2. Intégration numérique de $d\sigma_{C1}$ donné par (1.67).

L'étude de l'intégrale triple est conduite comme pour σ_{BM} : figures 1.23 à 1.27 . Les limites d'intégration sont celles du tableau 1.1. Pour $k = 5,2$, nous adoptons les pas d'intégration du tableau 1.2, pour $k = 12$ et 25, ceux du tableau 1.3. Dans ces conditions, l'erreur de calcul est dans tous les cas inférieure à 5 % (ou voisine de 5 %).

Tableau 1.3 : pas d'intégration

k	y	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\phi$	y	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\phi$
12	0,1	0,100	0,062	0,523	0,9	0,062	0,100	0,523
	0,3	0,087	0,069	"	0,7	0,069	0,087	"
	0,5	0,075	0,075	"				
25	0,1	0,083	0,033	0,523	0,9	0,033	0,083	0,523
	0,3	0,066	0,041	"	0,7	0,041	0,066	"
	0,5	0,050	0,050	"				

3. Calcul de σ_{C3} donné par (1.80).

L'intégration de (1.80) sur θ_1 et θ_2 est faite dans le même programme que σ_{C1} (figures 1.24 à 1.27). Avec les mêmes limites et les mêmes pas d'intégration que pour σ_{C1} , l'erreur de calcul est inférieure à 10 % (ou voisine de 10 %).

Les temps pour un calcul de " σ_{C1} plus σ_{C3} " sur IBM 1620 sont de :

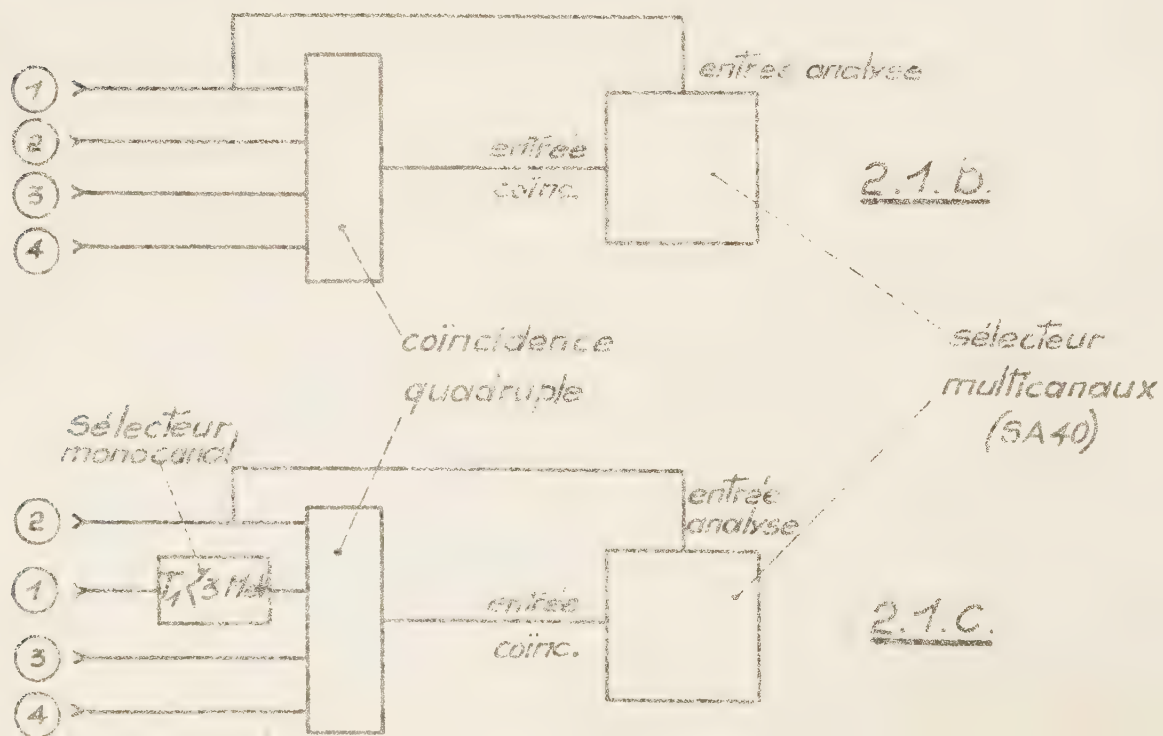
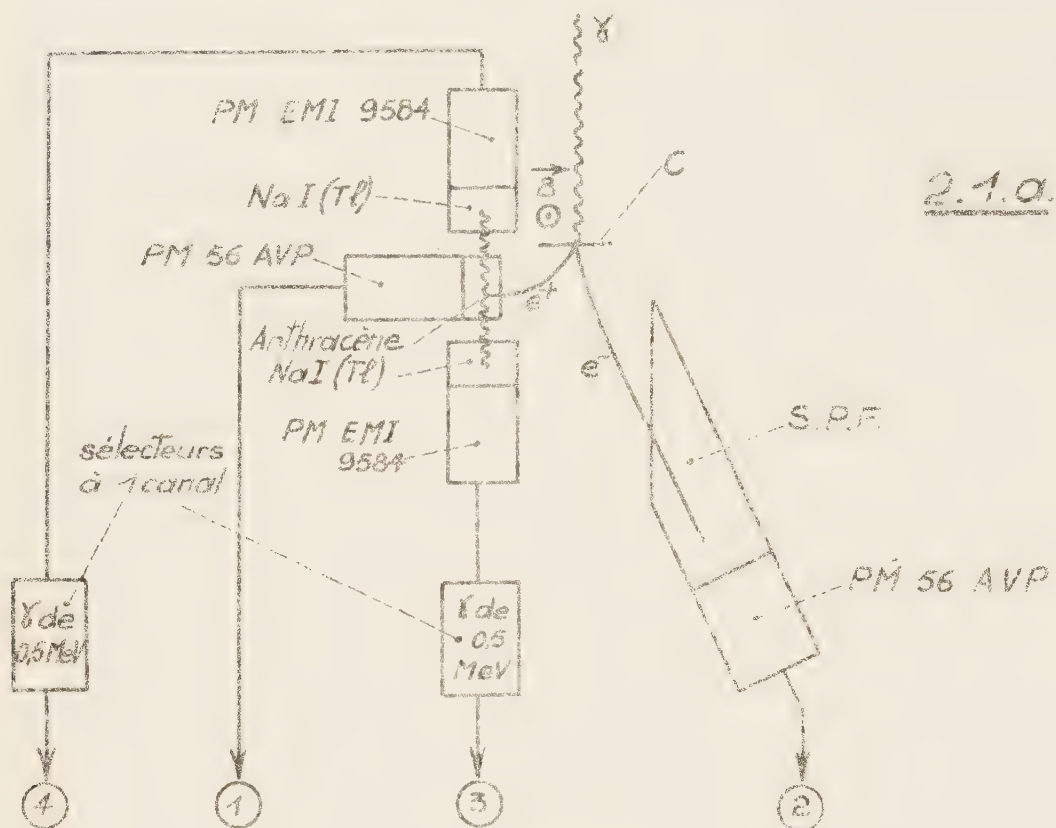
1 heure pour $k = 5,2$;

2 heures pour $k = 12$ et 25 .

DEUXIEME PARTIE

ETUDE EXPERIMENTALE

Figure 2.1: schéma de principe du dispositif expérimental.



Le détecteur de paires est dérivé d'un dispositif mis au point au Laboratoire dans le cadre du Contrat n° 1228-R avec le Commissariat à l'Energie Atomique^(37,38,39,40,41). Ce premier dispositif utilisait la détection en coïncidence du positon et du négaton par des radiateurs Cerenkov en plexiglass.

Aux énergies considérées ici, voisines de 10 MeV, les radiateurs Cerenkov à absorption totale ne permettent pas la spectrométrie des électrons⁽⁴²⁾; ils ont dû être remplacés par des scintillateurs. L'utilisation de scintillateurs augmente par contre la contamination en événements parasites; cette contamination nous a conduits à introduire une condition supplémentaire pour sélectionner les événements de matérialisation ("bons événements"): nous imposons la coïncidence quadruple entre les impulsions issues de quatre scintillateurs détectant respectivement le positon, le négaton et les deux rayons γ d'annihilation du positon.

La figure 2.1 présente le schéma de principe du détecteur. Le faisceau de rayons γ convenablement collimaté donne des événements de matérialisation dans la cible C. Un champ magnétique de 0,25 T perpendiculaire au plan de la figure est produit dans la région de la cible par un aimant permanent; son seul rôle est de séparer négaton et positon.

Le négaton est détecté par un scintillateur plastique "SPF"* de forme et dimensions convenables pour permettre un bon rendement lumineux et l'absorption totale de l'électron jusqu'à une énergie de l'ordre de 25 MeV.

Le positon est détecté par un scintillateur en anthracène (nous disons par la suite "scintillateur anthracène" ou simplement "anthracène") de dimensions beaucoup plus petite que le "SPF": la probabilité de détection des rayons γ d'annihilation doit être à peu près constante en tout point du volume du scintillateur. Dans ces conditions de dimensions, "l'anthracène" permet l'absorption totale du positon jusqu'à une énergie cinétique T_1 voisine de 3 MeV.

* SPF = scintillateur plastique fluorescent: p-terphényl et tétraphénylbutadiène en solution dans du polystyrène⁽⁴³⁾.

Les rayons γ d'annihilation sont détectés par deux sondes à scintillateurs d'Iodure de Sodium activé au Thallium ("scintillateurs NaI" ou simplement "NaI"), associés à des sélecteurs à un canal fixant l'énergie de 0,5 MeV.

La coïncidence des quatre informations de présence autorise l'analyse en amplitude par le sélecteur multicanaux :

- soit de l'information linéaire issue de "l'anthracène" dans le cas où le faisceau de rayons γ est monochromatique (2,62 MeV) : figure 2.1.b ;

- soit de l'information linéaire issue du "SPF" si on utilise un faisceau de rayonnement de freinage (figure 2.1.c) ; dans ce dernier cas, un sélecteur monocanal supplémentaire placé dans le circuit de "l'anthracène" fixe l'énergie cinétique T_1 à une valeur inférieure à 3 MeV.

Dans le chapitre V, nous analysons les différentes fonctions et les éléments du schéma de principe. Le chapitre VI décrit l'expérience réalisée avec les rayons γ de 2,62 MeV et le chapitre VII concerne l'expérience avec faisceau de rayonnement de freinage. Le chapitre VIII donne le traitement des résultats expérimentaux en vue d'une comparaison aux résultats théoriques du chapitre IV.

CHAPITRE V

DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Les scintillateurs organiques sont associés à des photomultiplicateurs rapides (leur temps de montée est de quelques nanosecondes), alors que pour la détection des rayons γ de 0,5 MeV, nous utilisons deux sondes à scintillation du commerce (scintillateur + photomultiplicateur + préamplificateur) dont dispose le Laboratoire. Ces deux sondes fournissent une impulsion de temps de montée relativement long (quelques dizaines de nanosecondes), et surtout les sélecteurs à un canal associés sont des circuits lents (temps de montée voisins de la microseconde). Cette différence d'ordre de grandeur entre temps de montée des quatre impulsions rendant difficile la mise en oeuvre d'une coïncidence quadruple rapide, nous opérons en deux temps (figures 2.2 et 2.6) :

- les impulsions issues des voies "anthracène" et "SPF" sont mises en coïncidence double rapide ; le produit de cette coïncidence double ouvre deux portes linéaires rapides transmettant les informations linéaires issues des scintillateurs organiques ; ces portes fournissent des impulsions allongées ;

- les impulsions lentes provenant des voies "NaI" (avec sélecteurs à un canal) et des portes linéaires sont ensuite mises en coïncidence, soit directement sur un circuit de coïncidence lent (double ou triple), soit indirectement sur le sélecteur multicanaux.

Figure 2.2 : schéma synoptique de l'électronique rapide.

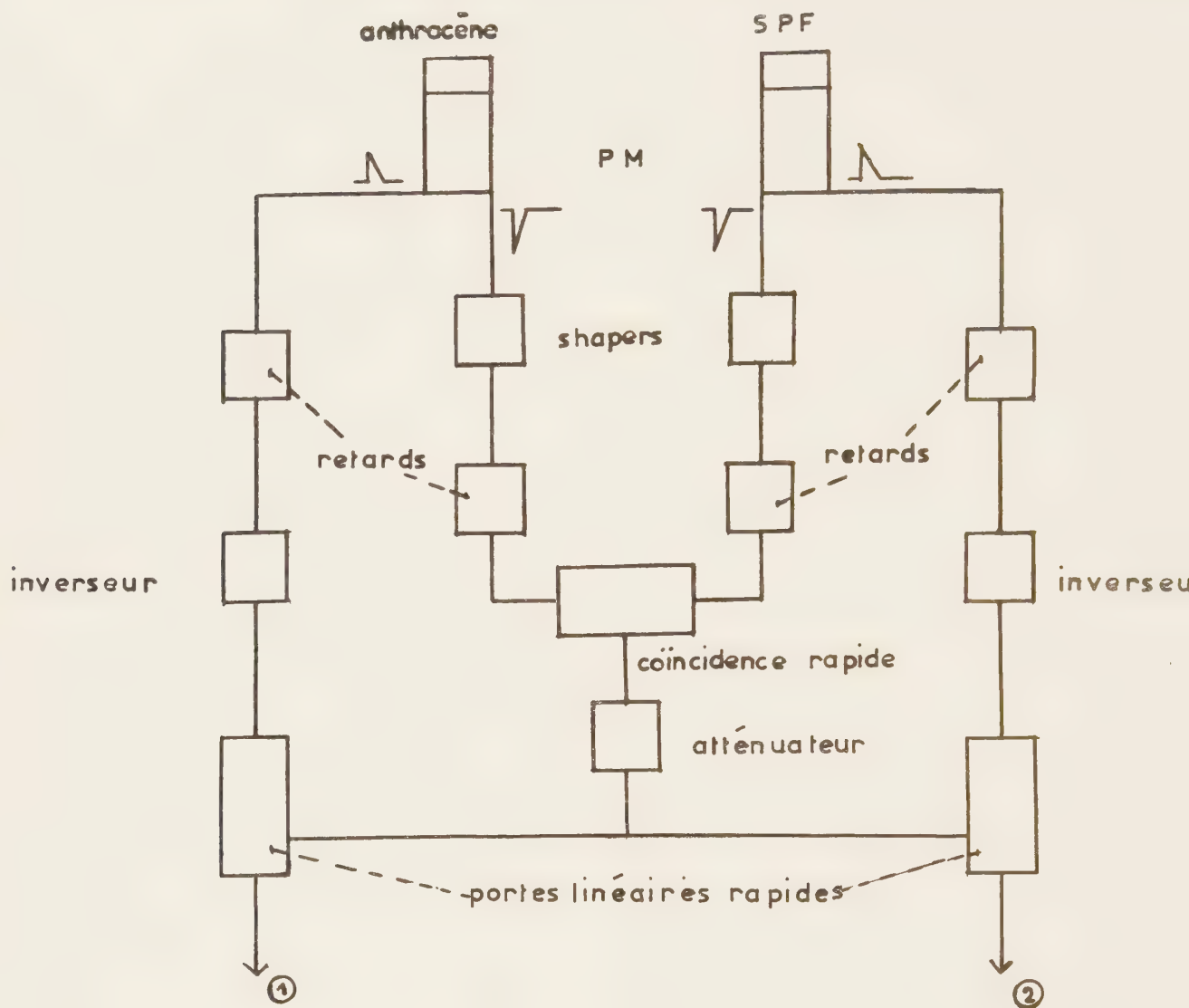
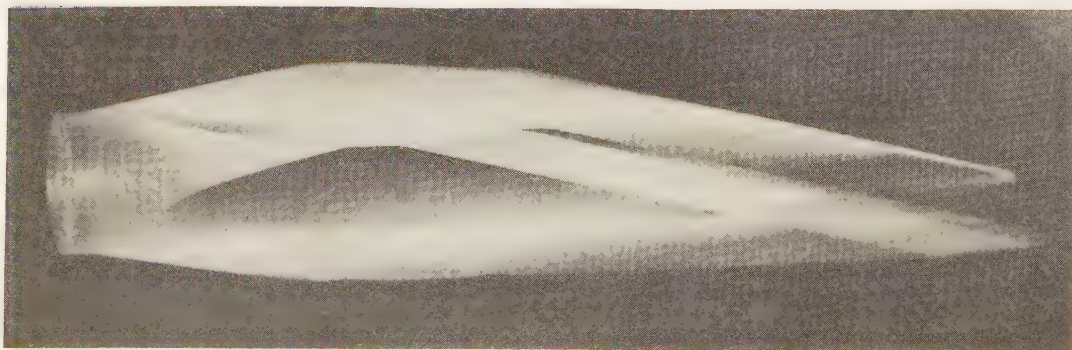


Figure 2.3 : un scintillateur SPF.



Nous distinguons ainsi dans l'électronique deux parties : l'électronique rapide et l'électronique lente. L'électronique rapide a été mise au point au laboratoire et reste la même pour l'ensemble des expériences. L'électronique lente comporte principalement des circuits standards du commerce ou du Commissariat à l'Energie Atomique^{*}; elle est en général différente pour les deux expériences réalisées.

1. L'électronique rapide.

La figure 2.2 en montre le schéma synoptique. Nous ne donnons qu'une description sommaire des circuits. On trouve des descriptions plus détaillées dans les références^(41,44).

a) les scintillateurs.

La figure 2.3 représente le scintillateur "SPF". Les faces sont polies puis recouvertes d'une feuille d'aluminium ou de mylar non collée (le rendement lumineux est alors meilleur). L'ensemble est recouvert de ruban adhésif noir sauf sur la face d'entrée des électrons. Le joint optique avec le photomultiplicateur est réalisé par de la colle "EASTMAN".

Le scintillateur "anthracène" est un cylindre (diamètre : 47 mm ; hauteur : 25 mm). La liaison avec le photomultiplicateur est réalisée par un guide de lumière en plexiglass (longueur : 100 mm) dont le but est d'éloigner le photomultiplicateur du champ magnétique, les différents joints optiques étant obtenus par de la colle "EASTMAN" (anthracène-plexiglass) et de la graisse silicone (plexiglass-photomultiplicateur).

b) Les photomultiplicateurs ("PM").

Ce sont des photomultiplicateurs rapides 56AVP/03, sélectionnés en raison de leur faible bruit de fond. Ils sont alimentés par une répartition B_0 ⁽⁴⁵⁾ dont l'avantage par rapport à la répartition classique B est une meilleure linéarité et un gain légèrement supérieur.

* Certains circuits (sélecteurs à 1 canal, coïncidence triple lente, etc...) ont été mis à notre disposition par les Centres d'Etude Nucléaire d'Arpajon et de Limeil.

Figure 2.4 : courbe de résolution de la coïncidence double rapide.

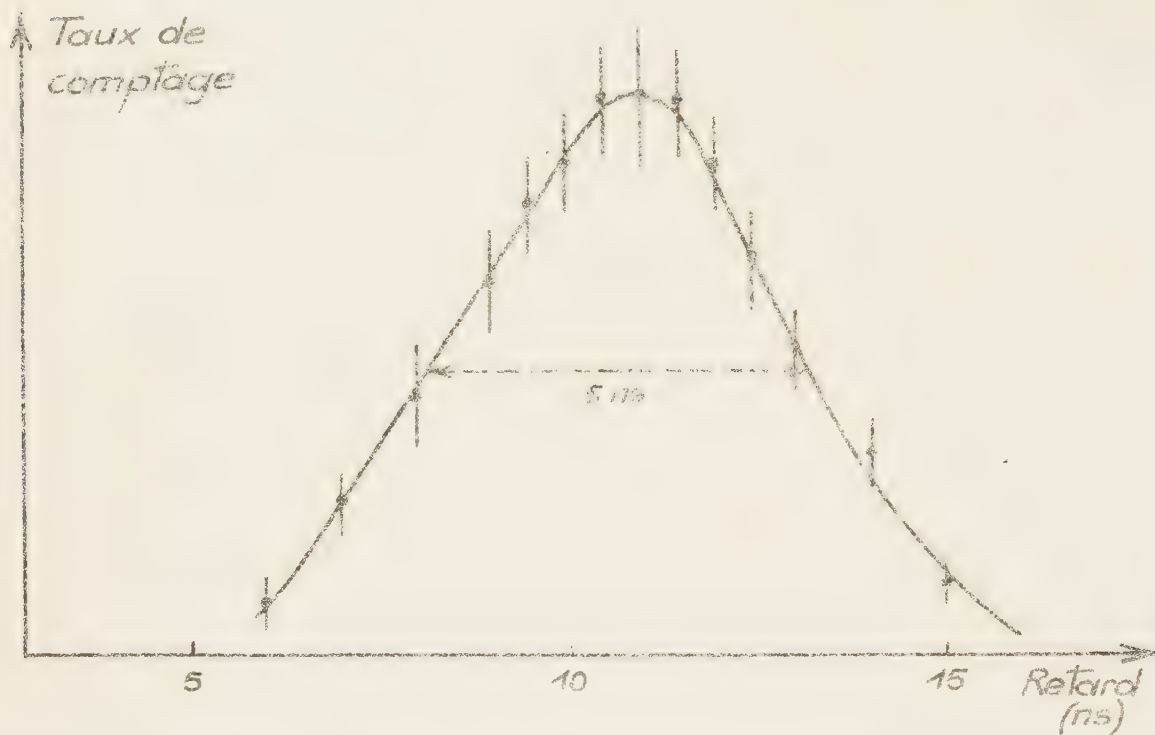
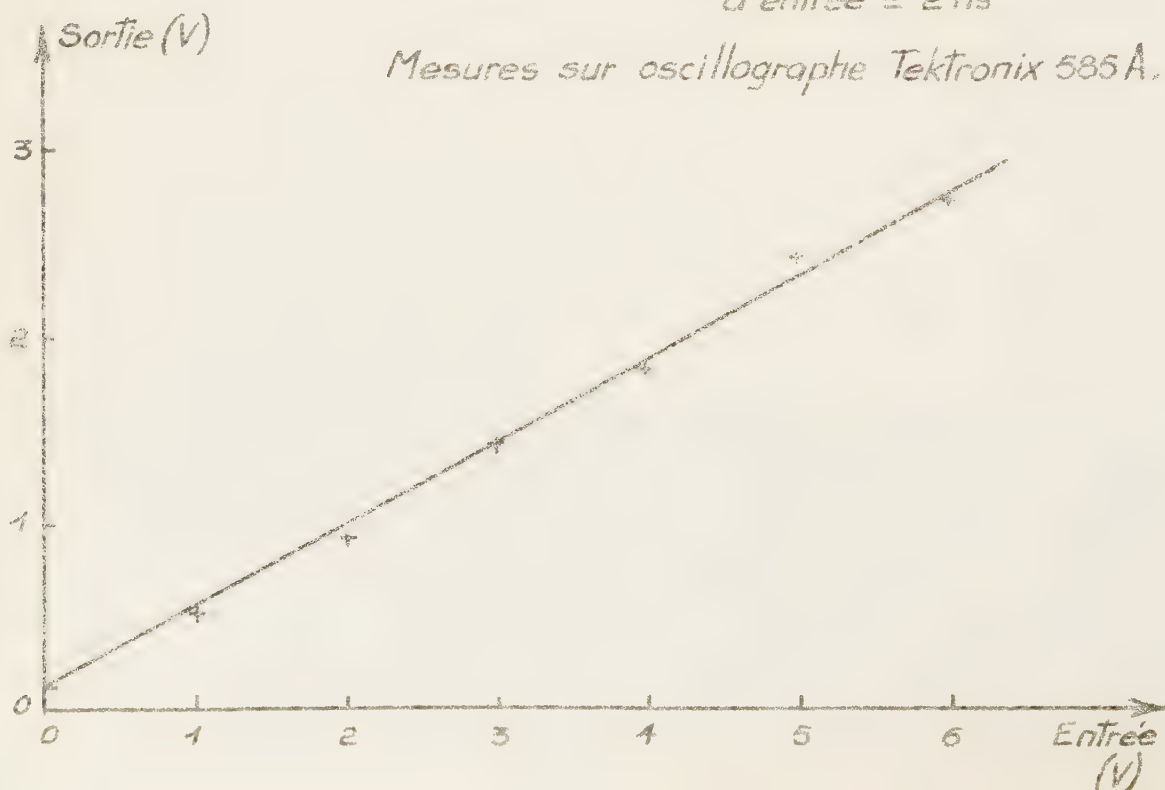


Figure 2.5 : linéarité d'une porte rapide

Largeur à mi-hauteur de l'impulsion
d'entrée = 2 ns

Mesures sur oscilloscopie Tektronix 585 A.



protection contre le champ magnétique de l'aimant permanent est obtenue grâce à un blindage en mumétal et acier doux, débordant largement la photocathode. Deux impulsions sont prélevées sur anode et dynode 14 de chaque photomultiplicateur.

c) Les circuits de mise en forme ("shapers").

Les impulsions négatives issues des anodes sont dirigées vers le circuit de coïncidence dont les entrées admettent des impulsions de hauteur comprise entre 2 et 15 V. Les spectres d'impulsions fournis par les "PM" pouvant atteindre une hauteur de 50 V, il est nécessaire d'utiliser un circuit de mise en forme intermédiaire dont le rôle est d'écrêter les impulsions aux environs de 6 V.

d) Les lignes à retard sont à câble coaxial.

e) La coïncidence double rapide.

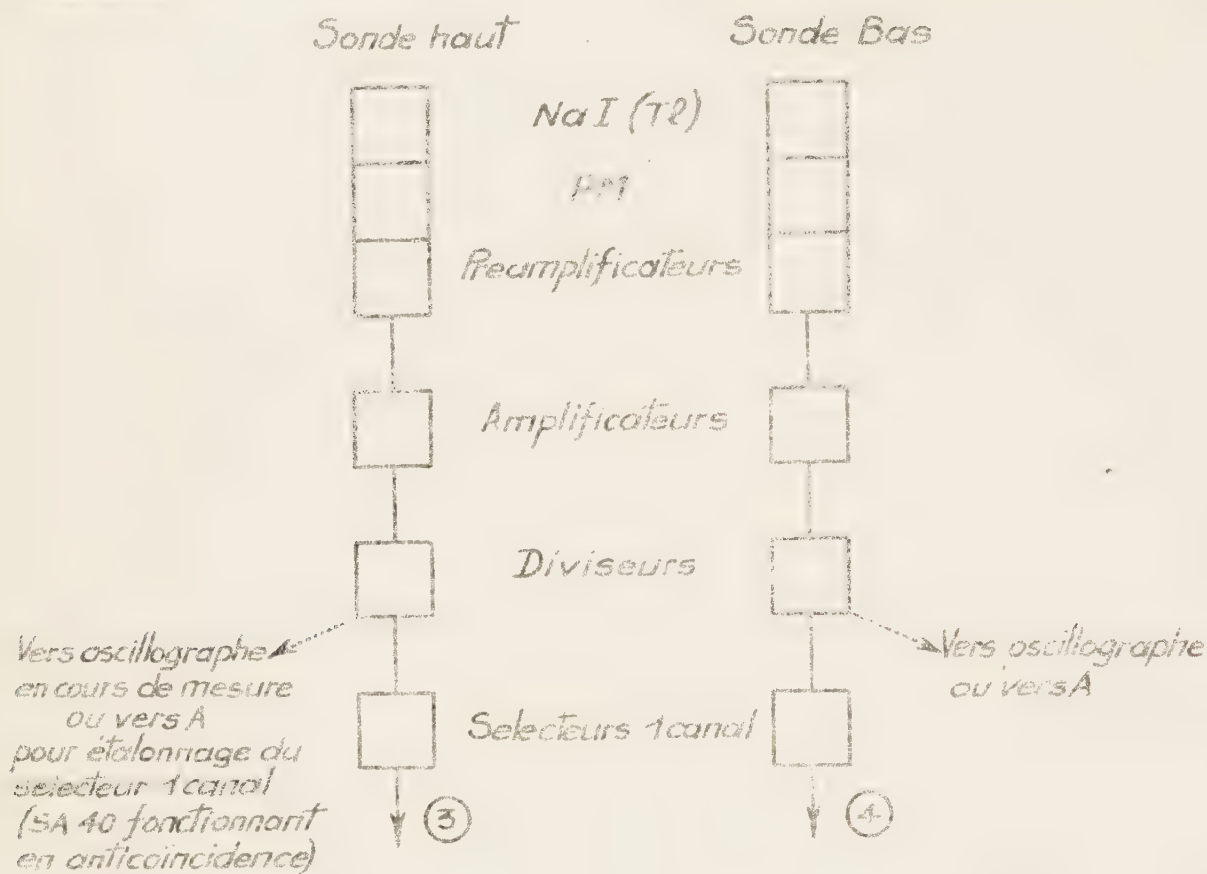
Elle est réalisée par un circuit "SAIP". La mise en forme à l'entrée du circuit est obtenue par un tube E280F dont la charge d'anode est constituée par une inductance formant avec les capacités parasites un circuit résonnant sur une fréquence d'environ 25 MHz. L'information de simultanéité est obtenue par addition sur 2 tubes 6BN6 branchés en parallèle.

L'ensemble "atténuateur", placé à la suite du circuit "SAIP", et "entrée déclenchement" des portes linéaires, dont le seuil est de 1 V, est équivalent à un discriminateur à seuil variable. Cet ensemble permet d'ajuster la résolution du système dans un domaine compris entre 1 ns et 20 ns.

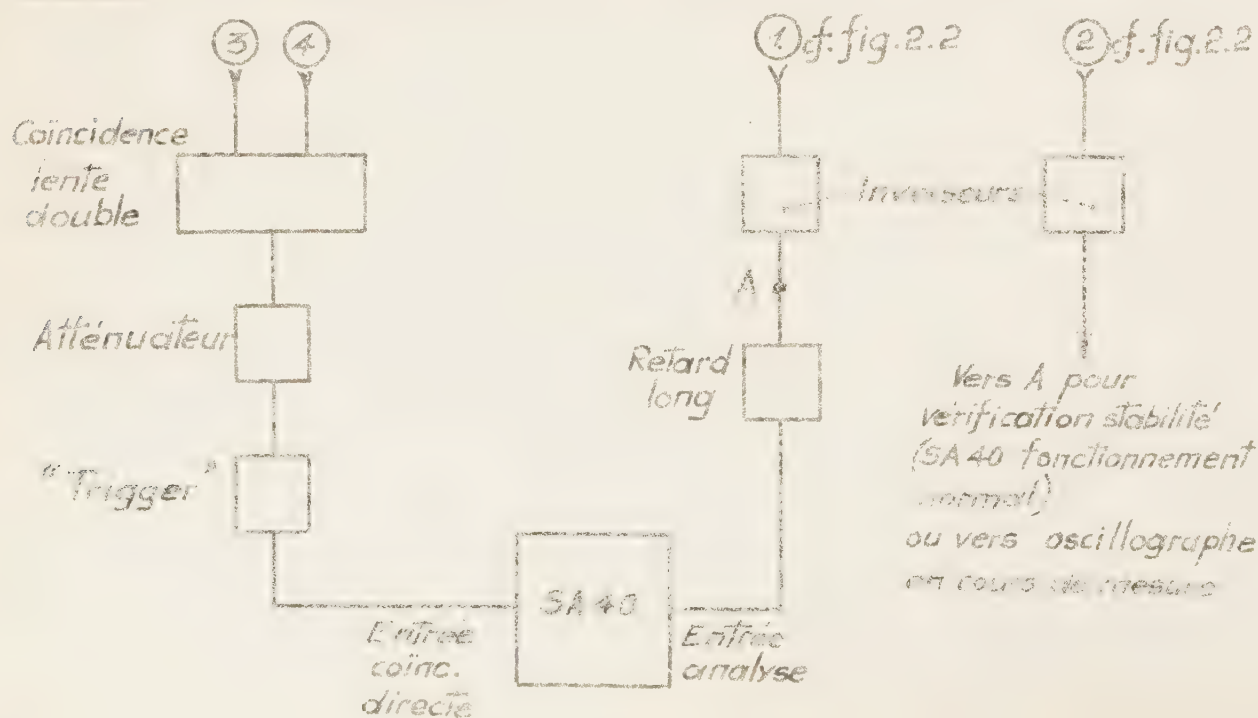
La figure 2.4 donne une courbe de résolution typique⁽⁴¹⁾ dont la largeur à mi-hauteur est 5.10^{-9} s. Dans les expériences décrites plus loin, le circuit n'est pas employé au maximum de ses performances car, tout en gagnant sur la certitude de simultanéité, on perd de "bons événements" correspondant aux petites impulsions, c'est-à-dire aux électrons de basse énergie ; le plus souvent, la résolution est comprise entre 10 et 15 ns.

Figure 2.6 : schéma synoptique de l'électronique lente.

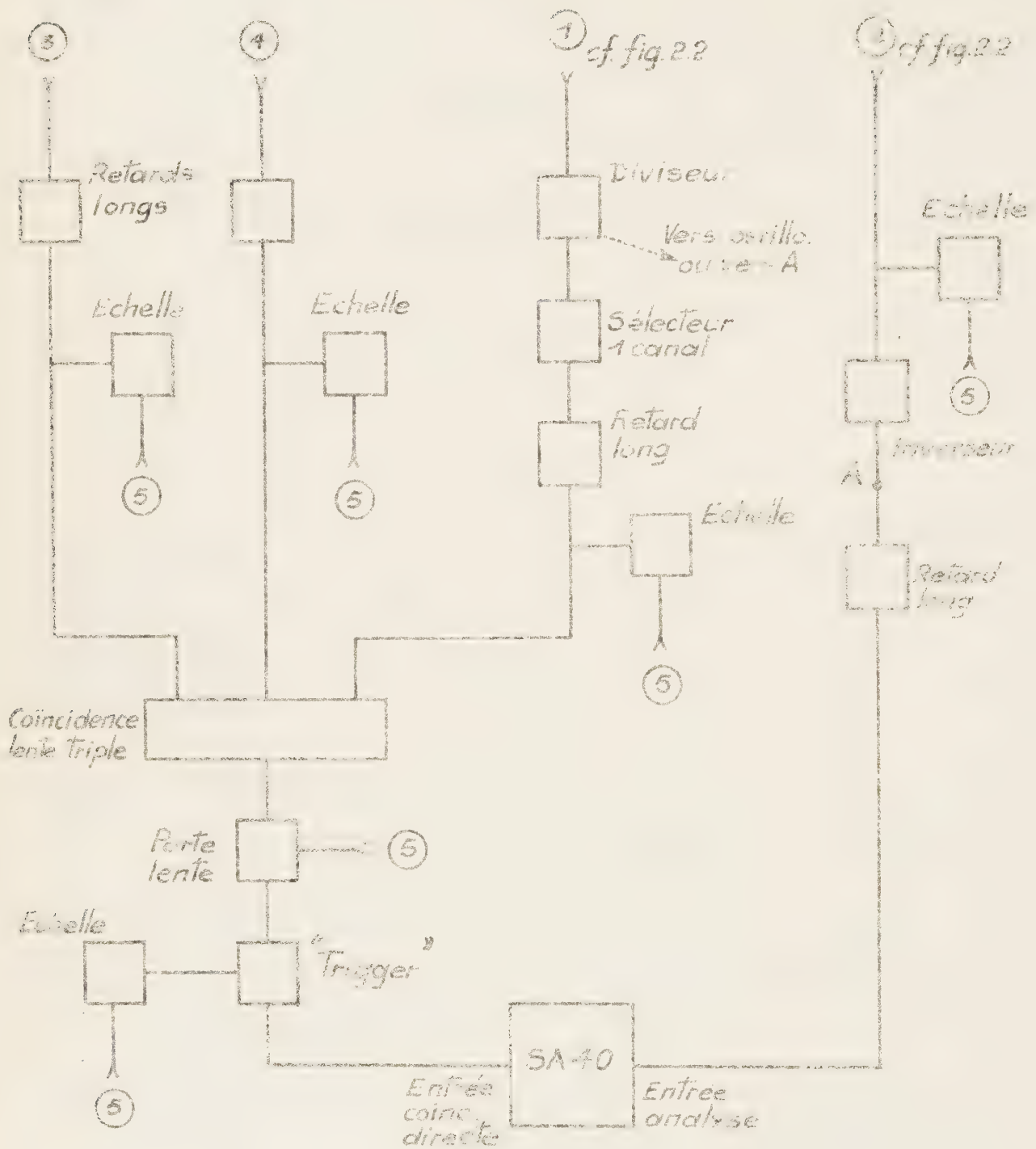
2.6.a : les voies Na I.



2.6.b : montage pour l'expérience avec rayons γ de 2,6 MeV.



2.1.2 : montage pour l'expérience avec rayonnement de freinage



(5) Impulsion délivrée par l'accélérateur pour synchronisation de l'ensemble de l'expérience.

Figure 2.7: réglage des voies "NaI"

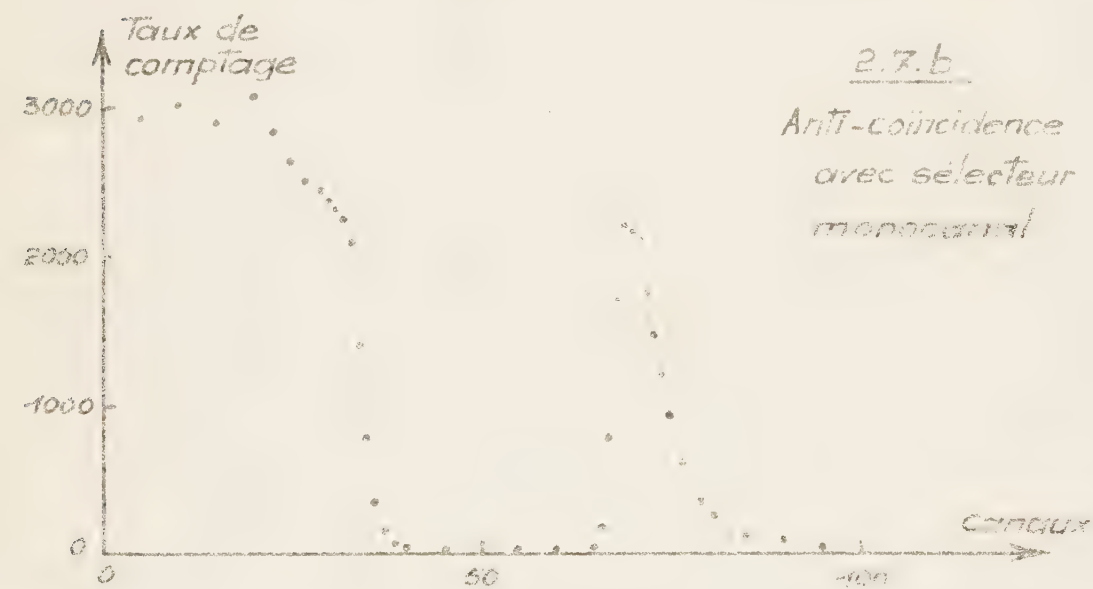
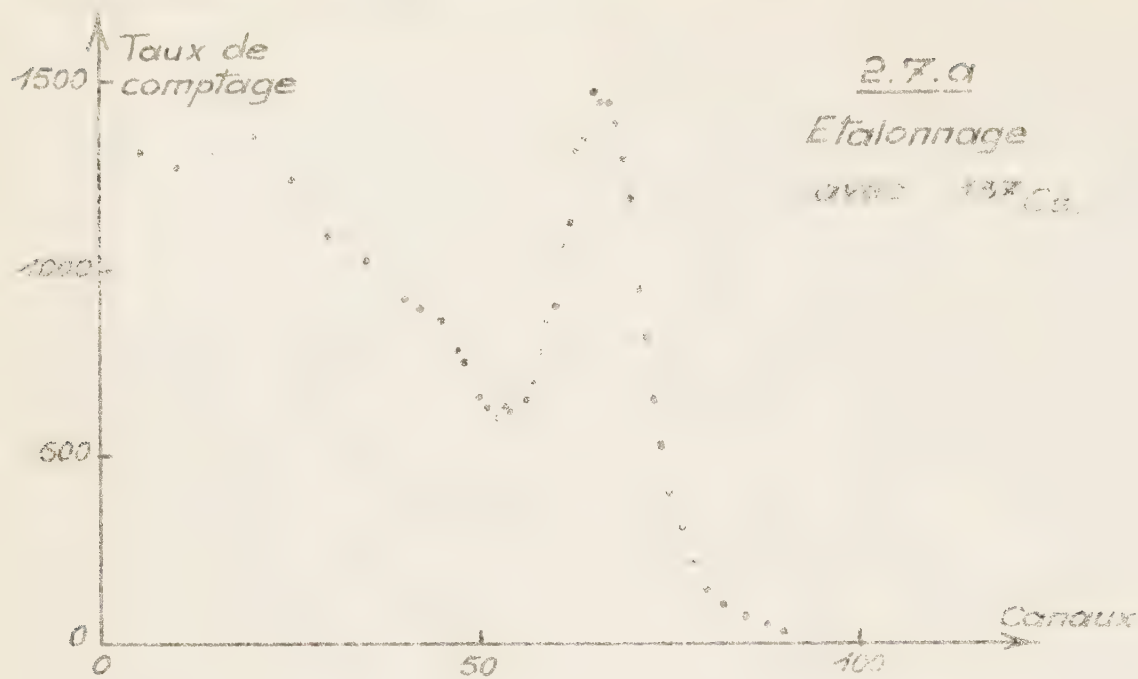
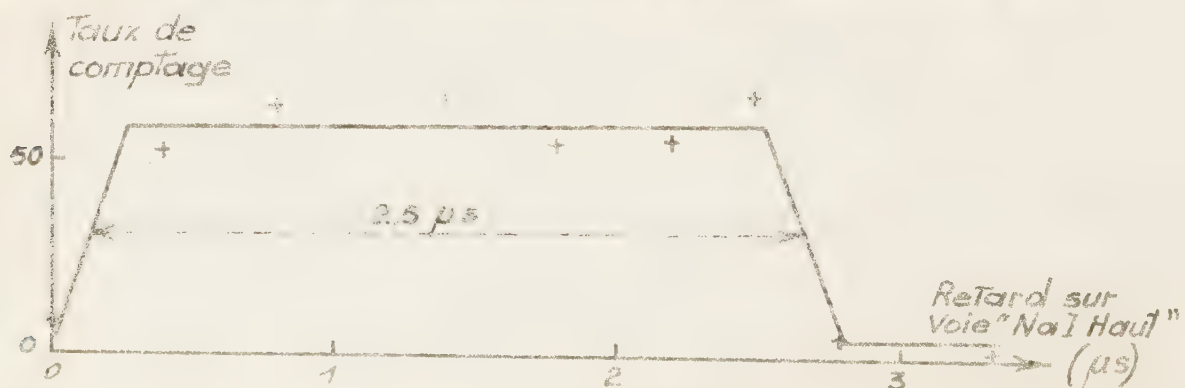


Figure 2.8 : courbe de résolution de la coïncidence triple lente



f) Les portes linéaires rapides.

Les portes linéaires rapides dont le schéma est extrait de ⁽⁴⁶⁾ ont été câblées et mises au point au Laboratoire ⁽⁴⁴⁾. Leur temps d'ouverture est de 30 ns du côté "SPF" (largeur d'impulsion voisine de 5 ns à mi-hauteur) et 75 ns du côté anthracène (largeur d'impulsion voisine de 20 ns à mi-hauteur).

La figure 2.5 donne une courbe de linéarité tracée à l'aide d'un générateur d'impulsions rapides. La stabilité mesurée sur une période de 70 heures est meilleure que 1 % ⁽⁴⁴⁾.

2. L'électronique lente.

La figure 2.6 donne les schémas synoptiques de l'électronique lente utilisée dans nos deux expériences.

a) Les voies "NaI" : figure 2.6.a.

Les sondes sont notées "Haut" et "Bas" à cause de leur position dans le détecteur (figure 2.14). La deuxième sortie des diviseurs est nécessaire pour le réglage des sélecteurs à un canal (connexion au point A des figures 2.6.b et 2.6.c). En cours de mesure, elle est branchée sur un oscillographe (visualisation du bon fonctionnement des circuits).

Le réglage des sélecteurs à un canal s'effectue en utilisant le sélecteur multicanal "SA40" en anticoncidence : la deuxième sortie du diviseur est dirigée vers la voie "analyse" du sélecteur multicanal, la sortie sélecteur à un canal vers l'entrée "anticoncidence" par l'intermédiaire du circuit de déclenchement ("trigger") ; le réglage de la fenêtre du sélecteur monocanal détermine une absence de comptage dans le spectre fourni par le sélecteur multicanal. On utilise pour ce réglage une source γ de ¹³⁷Cs. La figure 2.7 représente un spectre où la raie de 660 keV détermine l'étalonnage en énergie (canal 66) ; la fenêtre du sélecteur monocanal se trouve dans le spectre entre les canaux 35 et 67, d'où un réglage sur l'énergie : 510 keV $\pm$ 160 keV.

b) Montage relatif à l'expérience avec rayons γ de 2,6 MeV :

figure 2.6.b.

La coïncidence quadruple du schéma de principe est effectuée au cours des deux étapes :

- coïncidence double rapide et porte linéaire fournissant l'impulsion d'analyse ;

- coïncidence double lente des informations issues des voies "NaI" fournissant l'ordre d'analyse au sélecteur multicanaux fonctionnant en coïncidence.

On trace le spectre en énergie du positon. La résolution de la coïncidence lente est de l'ordre de quelques microsecondes. La figure 2.8 présente une courbe de résolution typique obtenue en coïncidence triple dans les conditions de l'expérience "test" décrite p.64

c) Montage relatif à l'expérience avec rayonnement de freinage :

figure 2.6c.

Réalisation de la coïncidence quadruple de principe :

- coïncidence rapide double et portes linéaires ;
- coïncidence triple lente entre informations issues des voies "NaI" et "anthracène" respectivement, l'énergie T_1 étant fixée par le sélecteur monocanal supplémentaire.

On trace le spectre en énergie du négaton. L'ensemble de l'expérience est synchronisé sur l'accélérateur qui fournit l'impulsion 5. On remarque la présence d'un grand nombre d'échelles de comptage ; cette présence est nécessaire pour l'étude de la stabilité des mesures et en vue des corrections dues aux fluctuations de fonctionnement de l'accélérateur. Ces échelles pourront servir de moniteur.

3. Etalonnage de la voie "anthracène".

La voie linéaire issue de "l'anthracène" est étalonnée en énergie à l'aide d'électrons de conversion interne. On dispose de deux sources : ^{137}Cs et ^{207}Bi fournissant respectivement des raies de 624 keV, 976 et 470 keV^(47,48).

Figure 2.9.

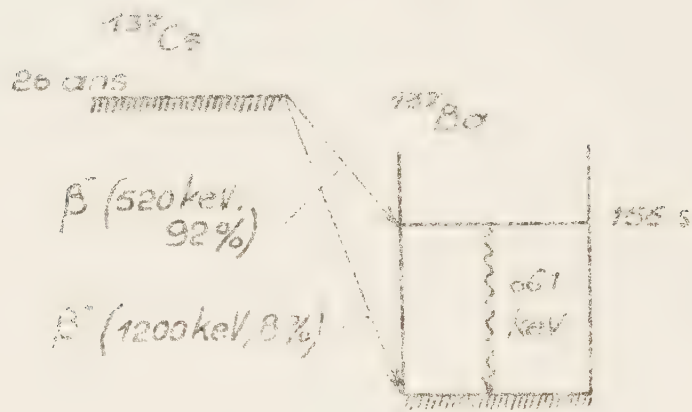


Figure 2.11.

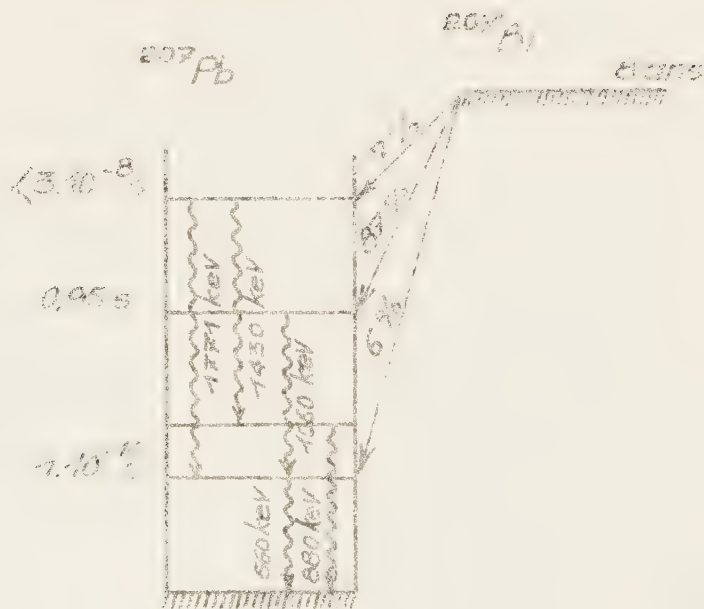


Figure 2-10: réponse de "l'anthracène" aux électrons de 624 keV (^{137}Cs)

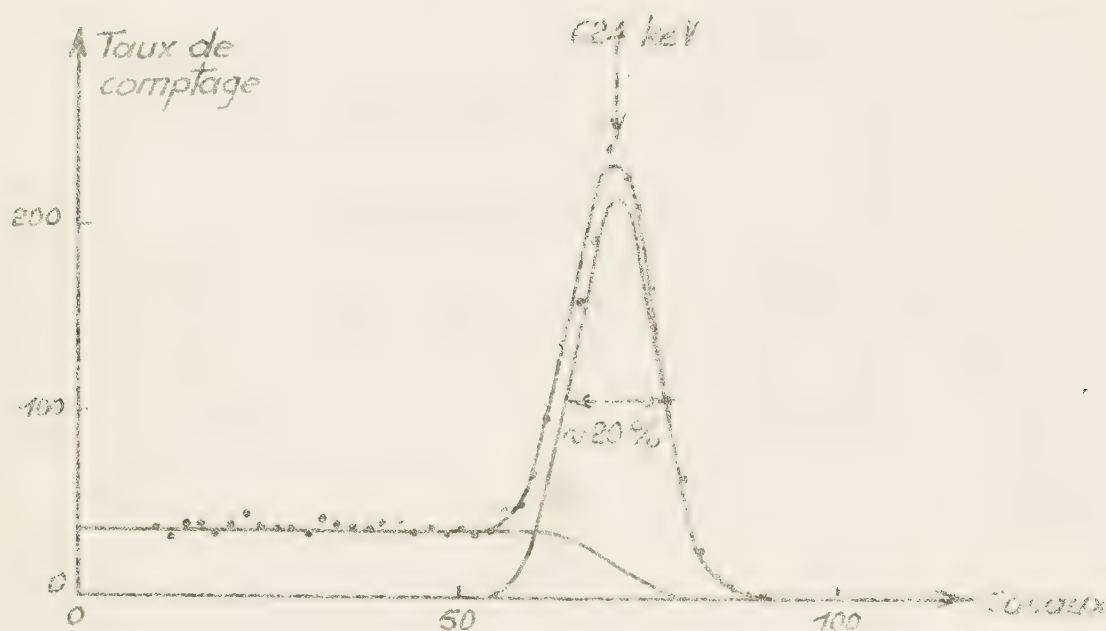
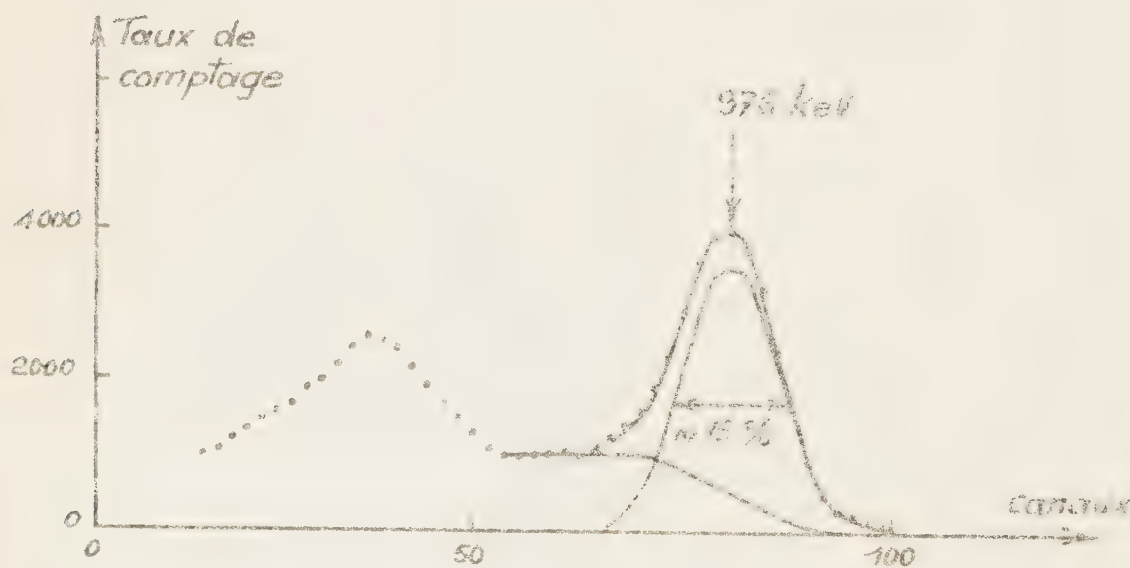


Figure 2-12: réponse de "l'anthracène" aux électrons de 976 keV (^{207}Bi)



Rappelons le principe de la méthode d'étalonnage⁽⁴⁹⁾. Le ^{137}Cs se désintègre suivant le schéma de la figure 2.9⁽⁵⁰⁾. La conversion interne a lieu lors de la transition de l'état excité à l'état fondamental du ^{137}Ba . Le rayon γ de 661 keV chasse un électron du cortège périphérique en lui communiquant une énergie cinétique égale à l'énergie de 661 keV diminuée de l'énergie de liaison. La probabilité de conversion interne la plus importante est relative à la couche K. Toutefois, la présence d'électrons éjectés de la couche L ne perturbe pas le résultat car la différence des énergies de liaison est très inférieure à la résolution du scintillateur. A l'électron de conversion interne est associé un rayon X de 37 keV produit par le réarrangement du cortège électronique.

Pour différencier l'électron monocinétique du fond continu β , on utilise la simultanéité des deux émissions : électron de conversion interne et rayon X. Toutefois, la simple coïncidence ne permet pas d'éliminer les nombreux événements parasites dus principalement aux diffusions des rayons γ de 661 keV ; il est obligatoire d'introduire, en plus de la coïncidence, une analyse en énergie de l'information "côté rayon X".

La figure 2.10 représente un spectre typique obtenu avec les électrons de 624 keV⁽⁴⁹⁾. Le spectre global se compose d'un pic gaussien du aux électrons entièrement absorbés dans le scintillateur, et d'un fond continu du aux électrons partiellement absorbés (rétro-diffusés). La résolution, mesurée sur la courbe de Gauss, est de l'ordre de 20 %. Dans le cas du détecteur de paire, la réponse de la voie "anthracène" aux électrons positifs ne présente pas de fond continu de rétrodiffusion car la coïncidence avec les rayons γ de 0,5 MeV et la géométrie du détecteur imposent l'annihilation du positon dans l'anthracène. Pour le traitement des résultats expérimentaux, nous considérons au chapitre VIII une réponse purement gaussienne.

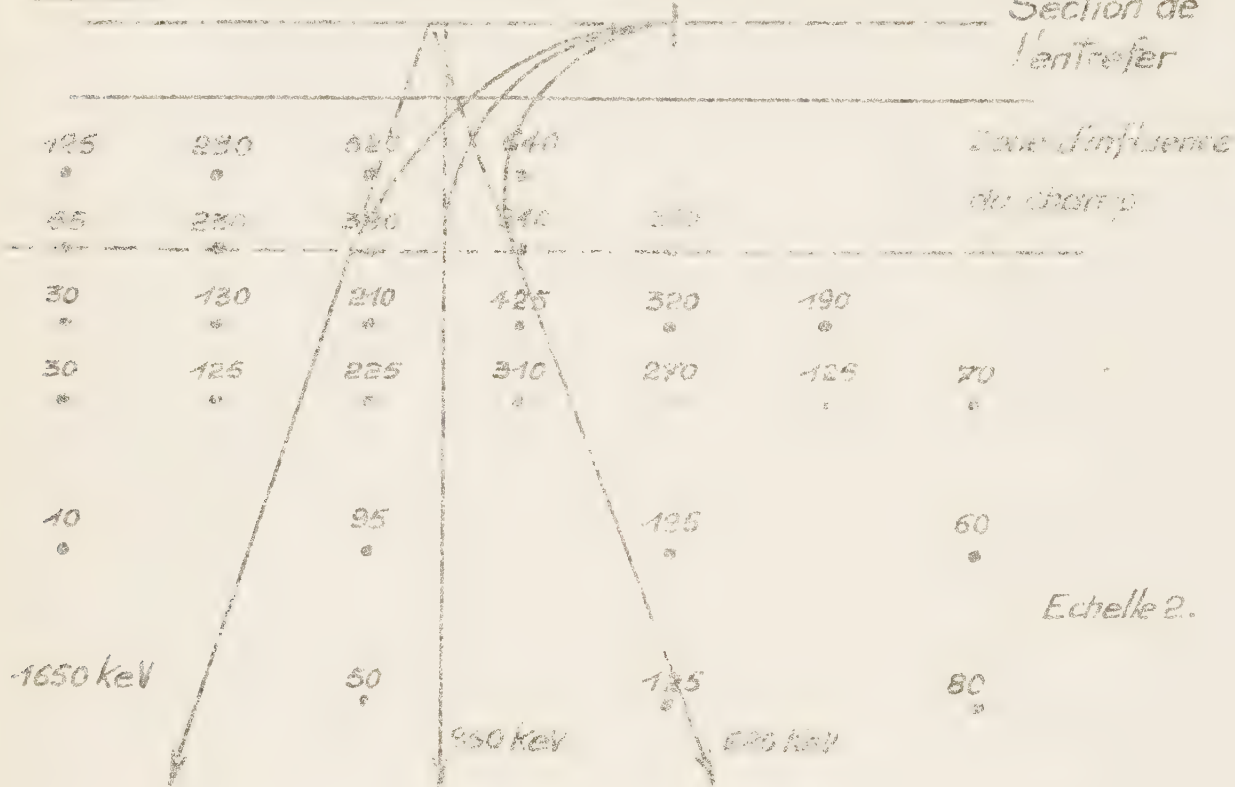
La deuxième source utilisée est le ^{207}Bi dont le schéma de désintégration est porté sur la figure 2.11⁽⁵⁰⁾. Le ^{207}Bi se transforme en ^{207}Pb par capture électronique avec une période de 8 ans. La conversion interne utilisée est issue des rayons γ en cascade de 1060 et 560 keV. Du fait de la très courte durée de vie de l'état excité à 560 keV (10^{-10} s), on peut faire ici les coïncidences avec analyse en

Figure 2.13: évaluation des trajectoires électroniques
dans l'entrefer de l'aimant.

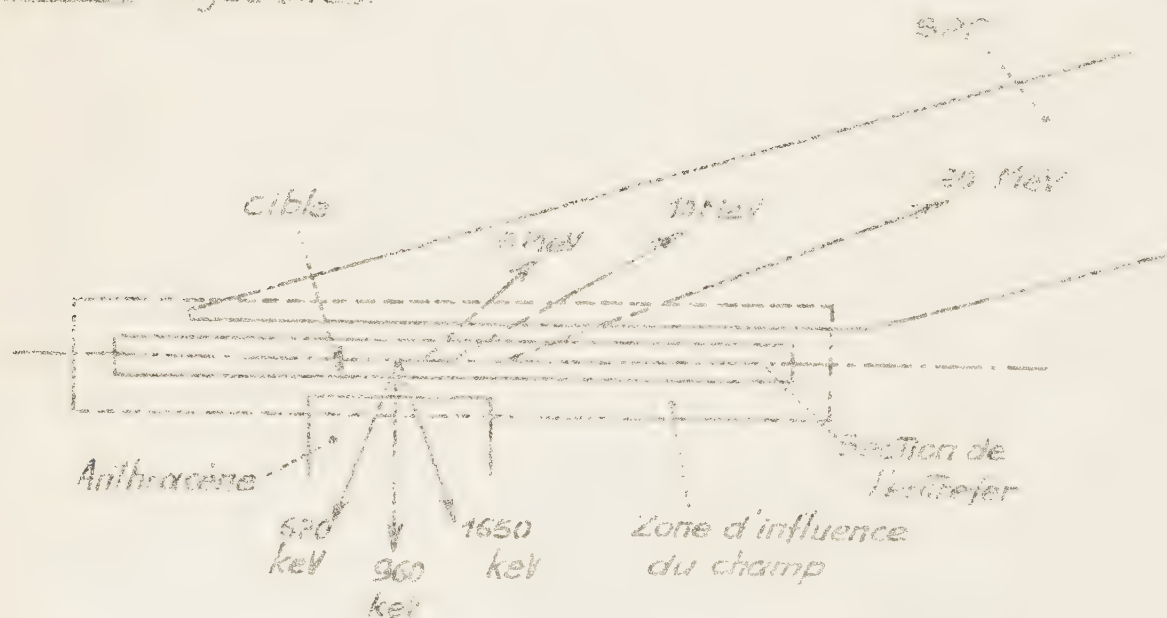
2.13.a : carte de taux de comptage.

Source ^{137}Cs

Section de
l'entrefer



2.13.b : trajectoires.



énergie du "côté γ "; - électron de 976 keV, rayon γ de 560 keV ;
- ou bien électron de 470 keV, rayon γ de 1060 keV. La coïncidence avec les rayons X de conversion interne de 80 keV donne en même temps les deux raies électroniques. La figure 2.12 représente un spectre obtenu en coïncidence avec les rayons X de 80 keV ; la résolution mesurée sur la courbe de Gauss de plus haute énergie est de l'ordre de 15 %.

4. La géométrie de la cible.

Nous nous proposons de déterminer expérimentalement l'allure des trajectoires des électrons issus de la cible de matérialisation, dans le champ magnétique de l'aimant permanent.

Dans ce but, nous disposons une source de ^{137}Cs à la place de la cible et nous mesurons les taux de comptage en différents points de l'espace à l'aide du scintillateur "anthracène" (légèrement collimaté) et de l'électronique associée. Pour sélectionner les électrons monocinétiques de 624 keV, nous utilisons en plus, comme précédemment, une sonde à scintillateur "NaI" (cette sonde reste fixe).

Nous avons porté sur la figure 2.13.a le taux de comptage des électrons monocinétiques en fonction de la position de l'anthracène. A l'aide de "cette carte de taux de comptage", on a pu tracer l'allure des trajectoires électroniques (figure 2.13.b), ce qui nous permet ensuite de positionner correctement cible, anthracène et SPF.

Figure 2.14 : expérience avec γ de 2,62 Mev.



Le détecteur .



L'électronique associée .

Figure 2.15: spectre de la source de Thorium 228.

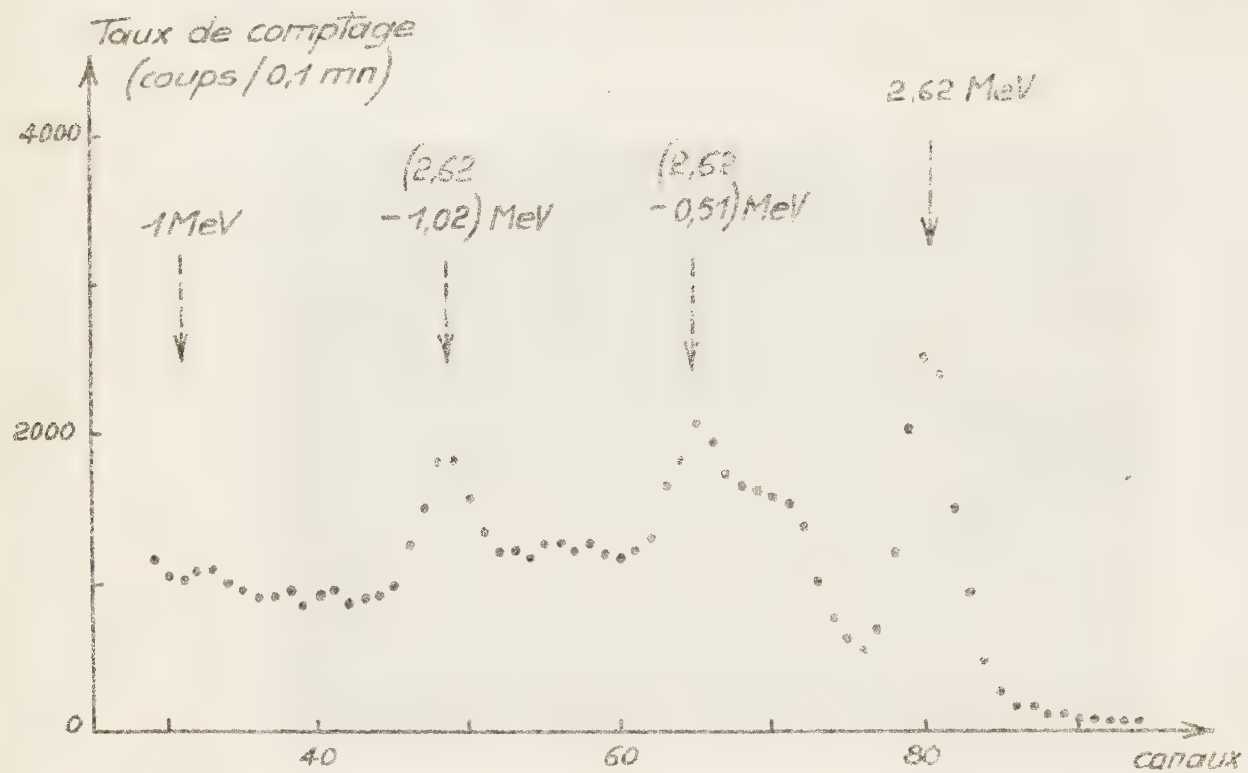
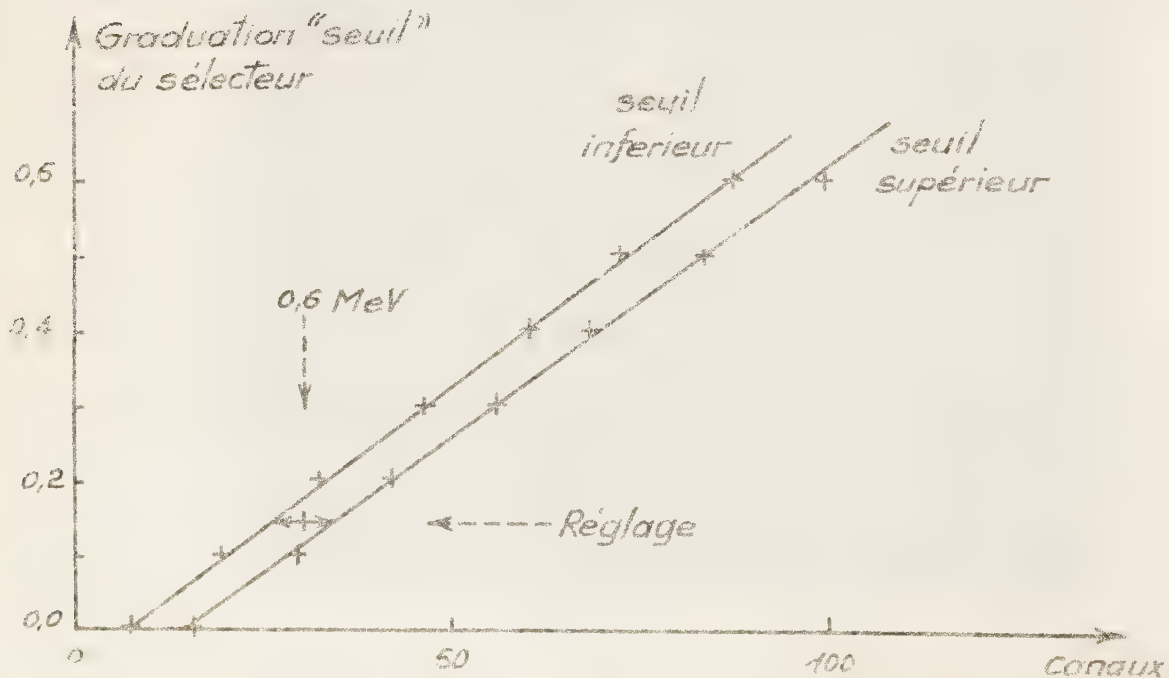


Figure 2.16: étalonnage du sélecteur monocranal sur la voie "anthracène" (expérience test)



CHAPITRE VI

EXPERIENCE AVEC

LES RAYONS γ MONOCHROMATIQUES DE 2,62 MeV

Les photographies de la figure 2.14 présentent le détecteur et l'électronique associée.

1. Le faisceau γ .

La source radioactive de 10 mC est une source de Thorium 228. La filiation radioactive correspondante se termine au Plomb 208. Parmi les descendants, le ThC" (^{208}Tl) émet des rayons γ de 2,62 MeV. Lorsque l'équilibre radioactif est atteint (ce qui est pratiquement le cas), on obtient un photon de 2,62 MeV dans 34 % des désintégrations. Les autres rayons γ importants en pourcentage ont des énergies beaucoup plus faibles (0,58 et 0,24 MeV) et ne sont donc pas gênants⁽⁵¹⁾. La figure 2.15 donne le spectre obtenu avec l'une des sondes "NaI" dans les conditions de collimation de l'expérience ; on voit qu'effectivement la seule raie apparente au-dessus de 1 MeV est celle de 2,62 MeV.

Le collimateur en plomb (épaisseur totale : 15 cm) définit un faisceau de section rectangulaire de 10 mm sur 4 mm. Un blindage en plomb supplémentaire de 2 à 3 cm d'épaisseur est placé autour de l'anthracène et des "scintillateurs NaI". Les "scintillateurs NaI" étant reliés directement à l'électronique lente sont en effet particulièrement sensibles au rayonnement parasite, d'où la nécessité du blindage supplémentaire.

Figure 2.17: étalonnage du SPP avec ^{137}Cs (expérience test).

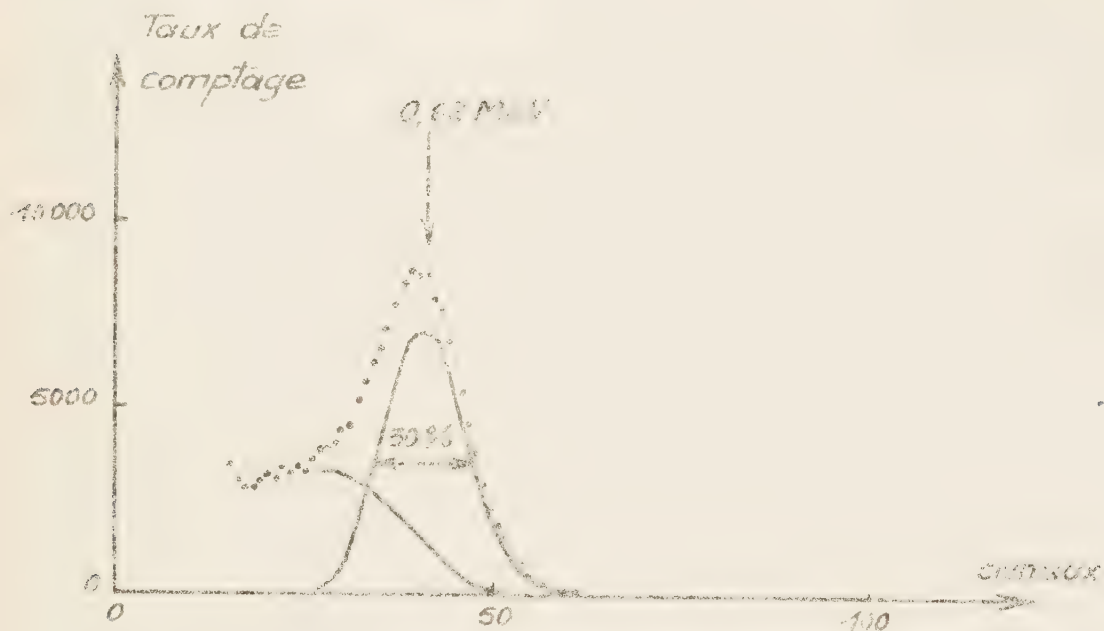
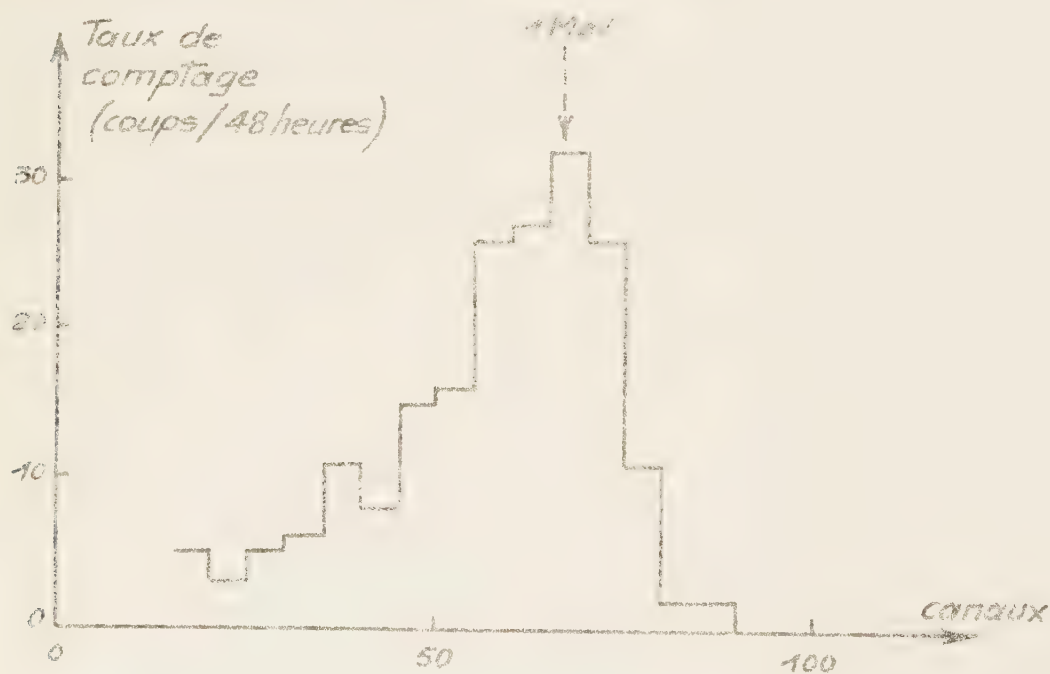


Figure 2.18: résultat de l'expérience test.



2. L'expérience test.

Dans le but de vérifier le fonctionnement de la manipulation et de prouver que les événements détectés en coïncidence quadruple sont bien des paires, nous réalisons l'expérience préliminaire suivante. Nous déterminons à l'aide du sélecteur multicanaux, le spectre des impulsions provenant du "scintillateur SPF" lorsque l'énergie sur la voie "anthracène" est fixée. Si les événements sont des paires, l'énergie E_2 est fixée par la relation (1.1) et l'on doit observer sur le sélecteur multicanaux, préalablement étalonné, un pic correspondant à l'énergie E_2 .

Le schéma de principe de l'expérience est le même que celui de la figure 2.1.c. Le schéma synoptique est celui de la figure 2.6.c à la synchronisation sur l'accélérateur près qui n'existe pas actuellement.

L'étalonnage de la voie "anthracène" est fait comme il a été dit dans le chapitre précédent. La figure 2.16 est relative au sélecteur fixant l'énergie cinétique T_1 . Le réglage adopté est $T_1 = (0,6 \pm 0,1)\text{MeV}$.

On utilise également les sources de ^{137}Cs et ^{207}Bi pour graduer en énergie le sélecteur multicanaux. La figure 2.17 donne le spectre obtenu avec le ^{137}Cs (résolution du "SPF" voisine de 30 %).

Enfin sur la figure 2.18, nous présentons le spectre résultant de l'expérience test. Le pic attendu au voisinage de 1 MeV est très net malgré la statistique relativement faible (on s'est limité à un comptage de 48 heures).

3. La conduite des mesures.

a) Choix des cibles.

Nous déterminons les spectres différentiels $N(T_1).\Delta T_1$ pour trois valeurs de Z :

- Z faible (Al, Z = 13) ,
- Z intermédiaire (Ag, Z = 47),
- Z élevé (Au, Z = 79).

$N(T_1).\Delta T_1$ représente le nombre d'impulsions dans l'intervalle d'énergie $T_1, T_1 + \Delta T_1$.

Il aurait été intéressant de pouvoir faire une mesure à partir d'une cible de Béryllium ($Z = 4$) car l'Approximation de Born est alors tout à fait valable. Toutefois, la durée de comptage, pour une même statistique, devient alors très longue.

En effet, nous déterminons l'épaisseur des cibles de façon que la perte d'énergie ΔT des électrons soit à peu près équivalente pour chaque valeur de Z . Compte tenu des énergies envisagées dans nos expériences, nous fixons ΔT inférieur à 40 keV pour un électron produit à mi-épaisseur de cible. A énergie élevée (T supérieur à quelques MeV), cette perte d'énergie est d'ailleurs négligeable. A basse énergie il suffit de considérer la perte d'énergie moyenne par ionisation.

On sait que la perte d'énergie moyenne par ionisation est proportionnelle à $\rho \frac{1}{A} Z$ avec :

ρ = masse volumique ,

l = épaisseur de cible ,

A = masse atomique .

D'ailleurs Z/A est à peu près constant pour tous les éléments et ΔT proportionnel à la masse superficielle $\rho.l$. On admet :

$$\Delta T / \rho l \sim 2. \text{MeV} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} ,$$

ce qui nous fixe les épaisseurs maximales des cibles à $40.10^{-3} \text{ g.cm}^{-2}$, soit :

Au	$\rho = 19,3 \text{ g.cm}^{-3}$	$l \lesssim 20 \text{ } \mu\text{m}$
Ag	10,5	40
Al	2,7	150

Le nombre de paires dans le temps t est proportionnel à $\rho \frac{1}{A} Z^2 t$. Ayant fixé les épaisseurs de cibles, nous trouvons donc que t varie comme $1/Z$ si l'on veut obtenir la même statistique pour chaque élément. Les temps de comptage adoptés (liés à l'efficacité du dispositif que nous évaluerons ultérieurement) sont de 3 jours pour une cible de $10 \mu\text{m}$ d'or et de l'ordre d'une semaine pour l'aluminium ; pour le Béryllium, il faudrait dans ces conditions un comptage de 3 ou 4 semaines.

b) Vérification de la stabilité de l'électronique.

Les mesures étant longues et l'électronique, relativement complexe une vérification de stabilité s'impose. Elle est réalisée toutes les

Figure 2.13: spectre β du ^{137}Cs avec une raie de conversion interne (voie "anthracène")

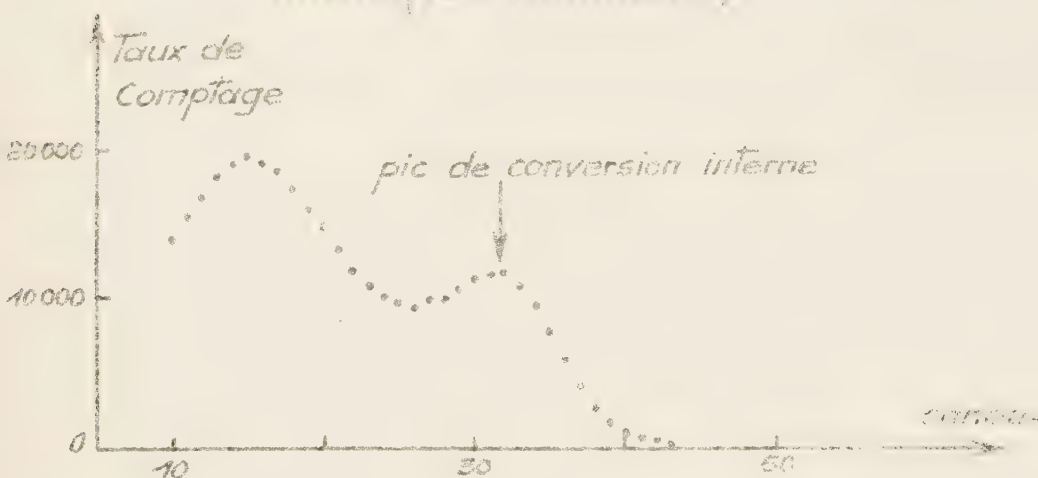


Figure 2.20: stabilité de l'électronique.

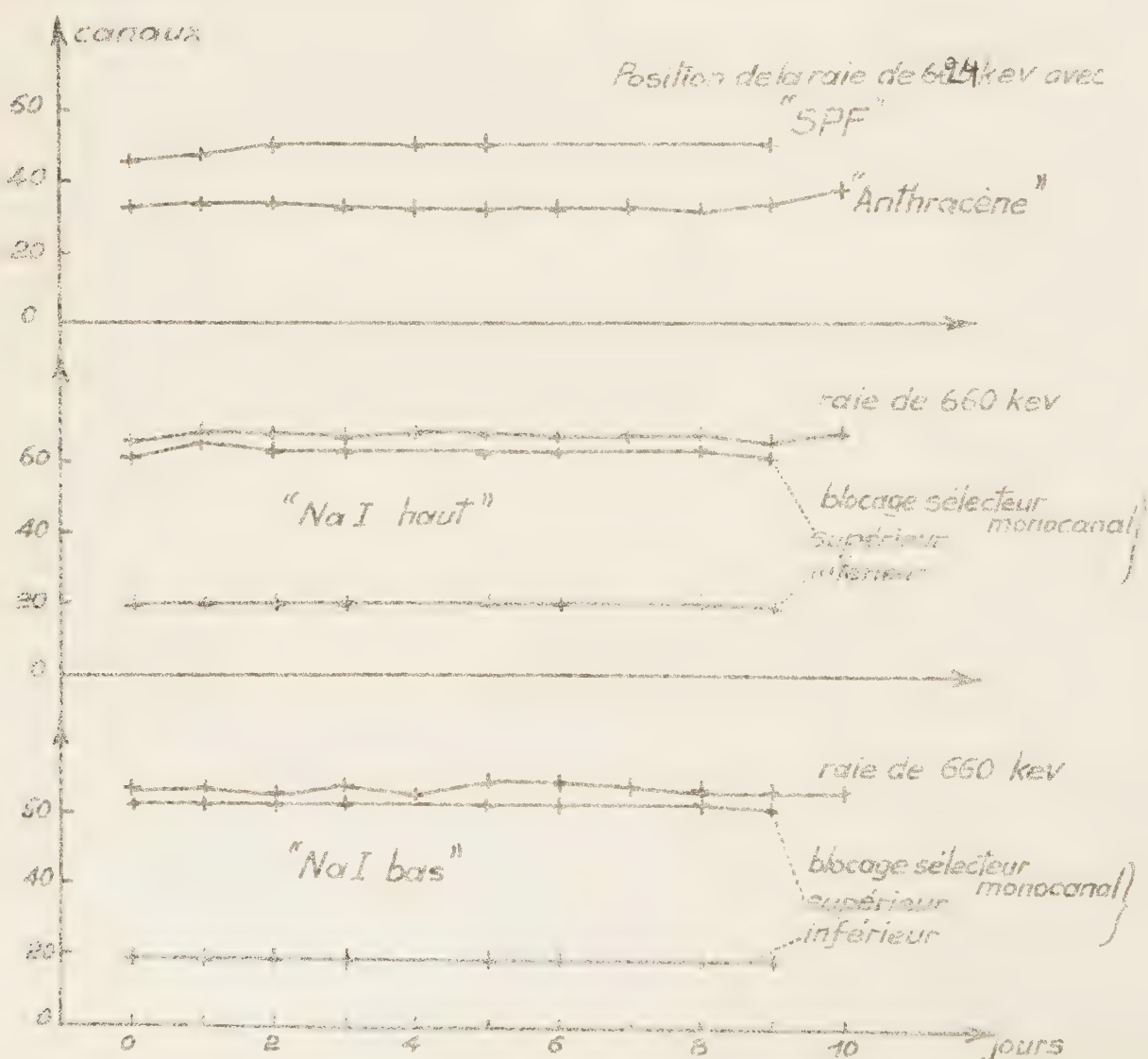
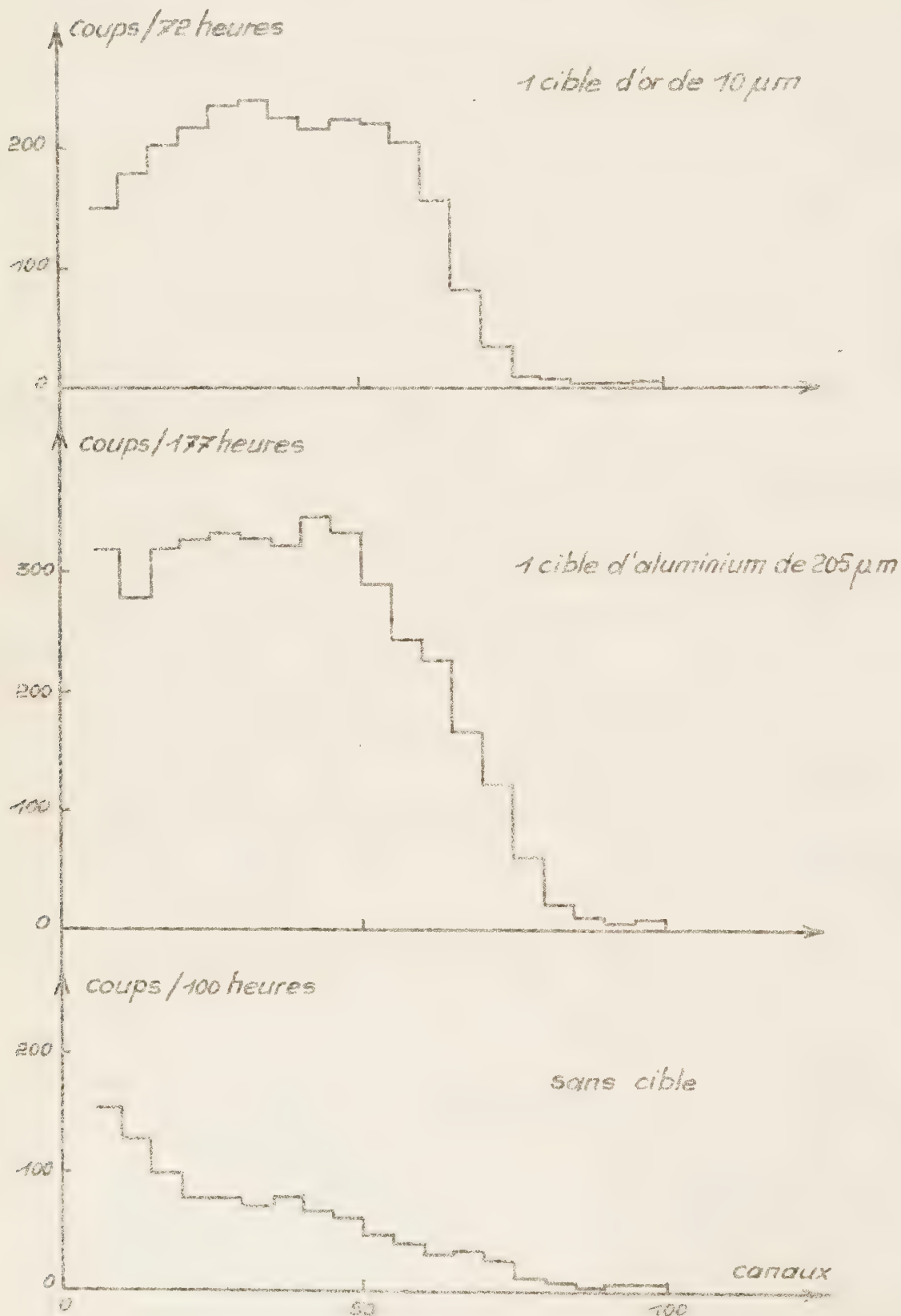


Figure 2.21 : exemples de résultats bruts de l'expérience
avec photons de 2,62 Mev.



24 heures et porte sur les quatre voies : "Anthracène, SPF, NaI haut et NaI bas".

Pour les voies "Anthracène et SPF", nous faisons simplement un spectre β de la source de ^{137}Cs où le pic de conversion interne est suffisamment apparent (figure 2.19). Ces spectres devant être faits dans les conditions de l'expérience, ils sont obtenus en appliquant sur la coïncidence rapide une seule impulsion d'anode dédoublée.

Pour les voies "NaI", nous traçons le spectre γ du ^{137}Cs sans et avec anticoïncidence du sélecteur 1 canal (figure 2.7).

La figure 2.20 représente des exemples de courbes de stabilité sur une période de 10 jours :

scintillateurs "Anthracène et SPF" : position du pic de conversion interne,
scintillateurs "NaI" : position du pic de 660 keV,
sélecteurs à un canal (sur voies "NaI") : seuils supérieur et inférieur.

Ces courbes permettront de faire éventuellement une correction de dérive ; la dérive est toujours inférieur à 6 %.

c) Résultats expérimentaux bruts.

Outre les spectres avec cibles, nous avons dû faire des spectres sans cible qui correspondent à des créations de paires dans l'air, le porte-cible, les fenêtres des détecteurs ou sur les bords des collimateurs. Il existe certainement, mais dans une faible proportion, des événements parasites provoqués par la diffusion du faisceau γ . Les coïncidences fortuites sont par contre très peu nombreuses ; les courbes de résolution de la coïncidence rapide retombe pratiquement à zéro pour de grands retards en abscisse.

La figure 2.21 présente des spectres bruts obtenus :

avec une cible d'or de 10 μm (72 heures de comptage),
avec une cible d'aluminium de 205 μm (177 heures),
et sans cible (100 heures).

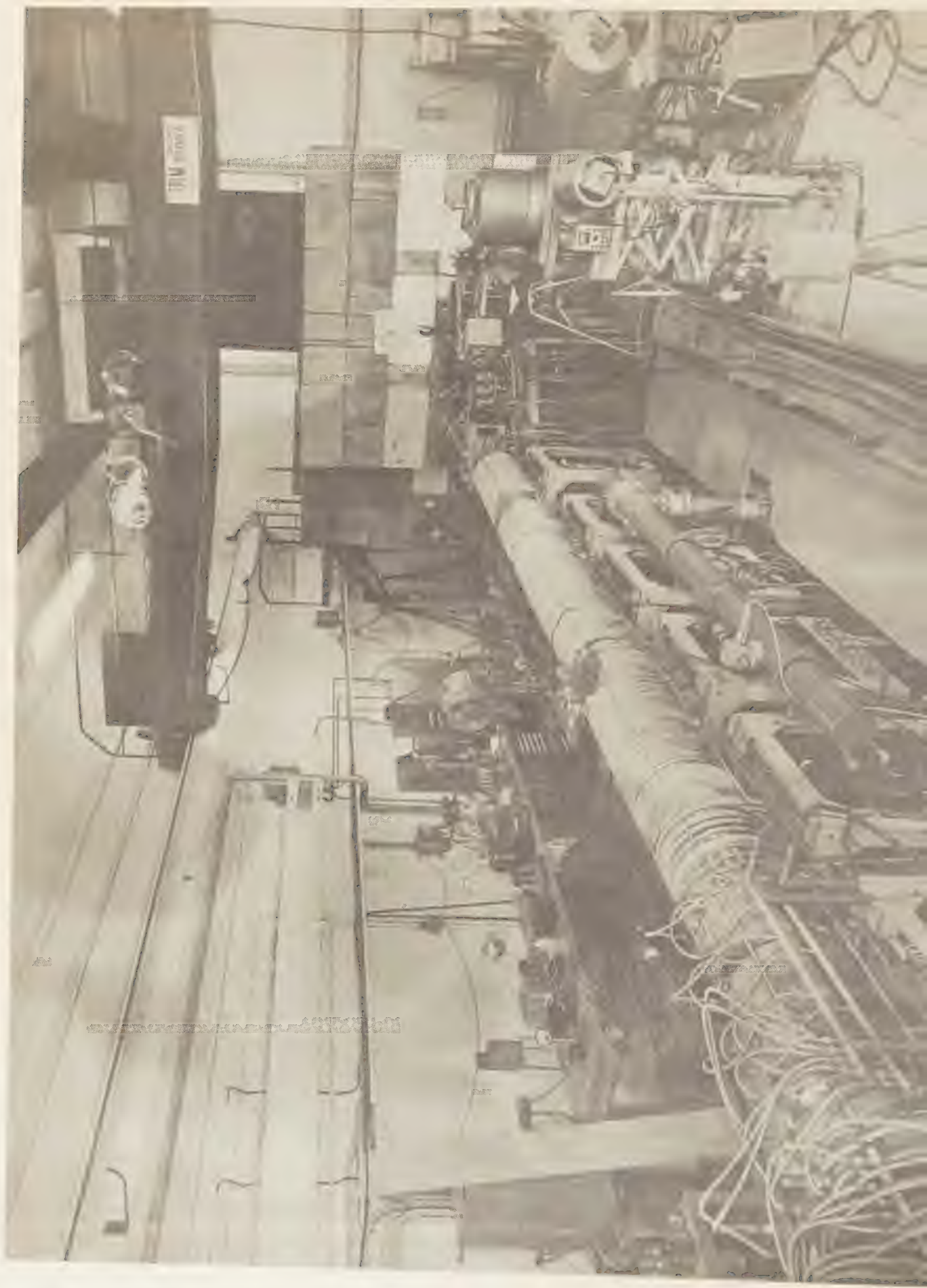
Les taux de comptage (nombre total d'événements détectés au-dessus du canal 5 du sélecteur multicanaux) sont de l'ordre de :

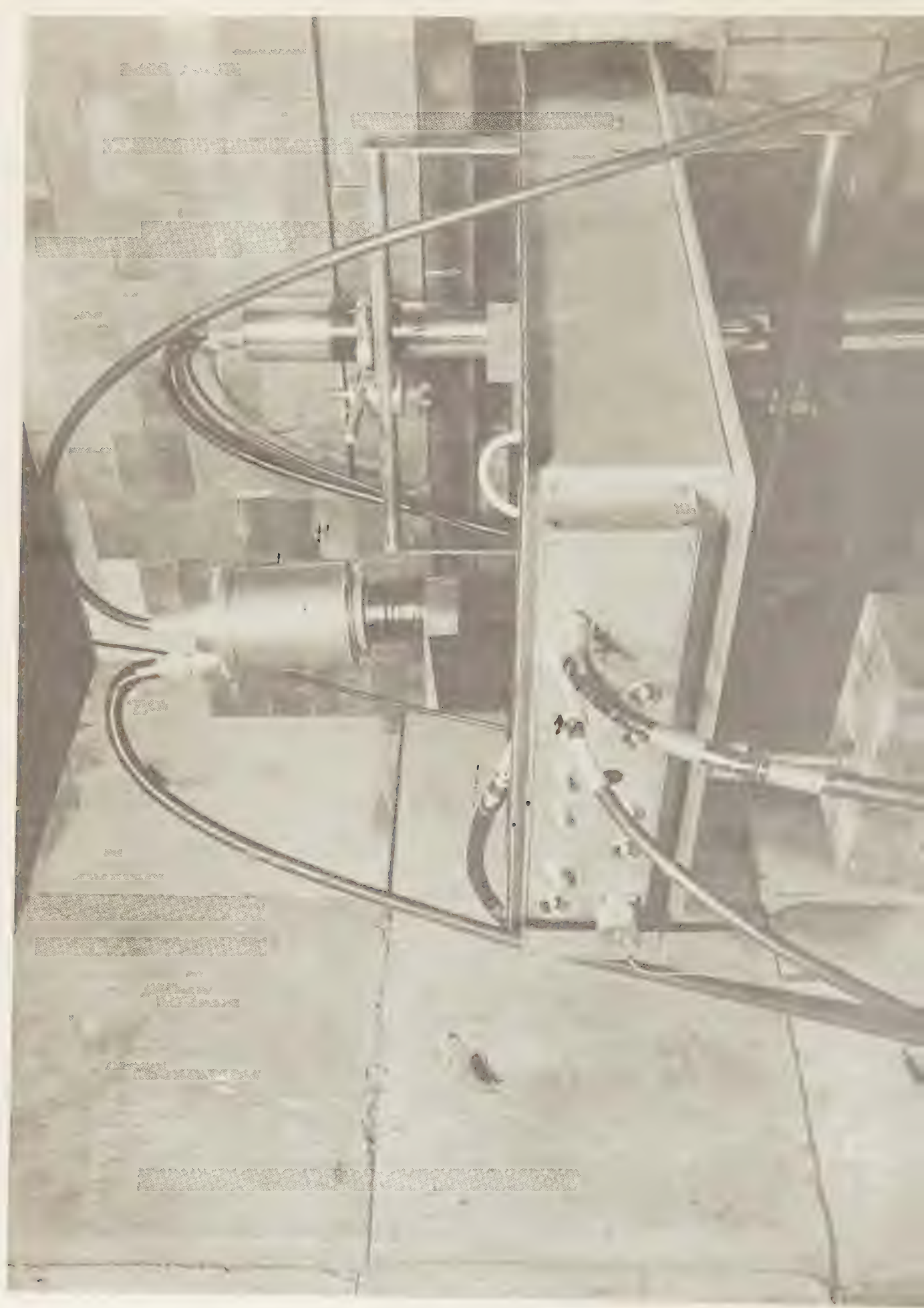
- 10 coups par heure sans cible,
- 20 coups par heure avec une cible d'aluminium de 205 μm ,
- 35 coups par heure pour une cible en or de 10 μm ,
- et 55 coups par heure pour une cible d'or de 20 μm .

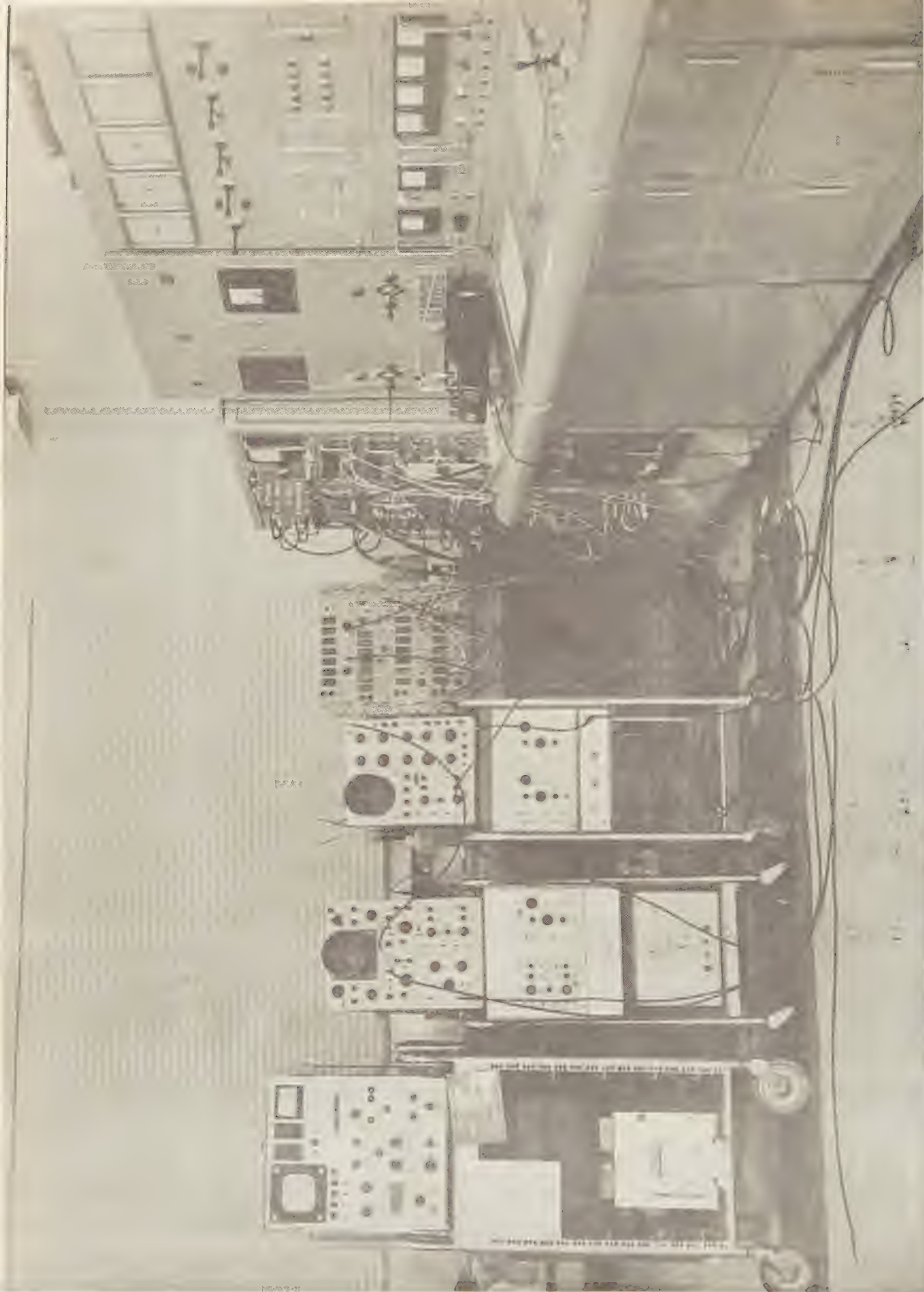
Il faut noter que ces valeurs numériques donneraient pour une cible de Béryllium de même masse superficielle, un taux de comptage de l'ordre de 13 coups par heure, très peu supérieur au comptage sans cible. Il est donc pratiquement impossible d'utiliser une cible en Beryllium.

d) Evaluation de l'efficacité du dispositif.

A partir du spectre de la source (figure 2.15), nous avons évalué à 10^7 rayons γ par heure l'intensité du faisceau dans les cibles. Il faut donc environ $2 \cdot 10^5$ photons pour obtenir une paire avec une cible d'or de 20 μm et 10^6 photons avec une cible d'aluminium de 205 μm .







A = fenêtre de sortie des électrons
primaires (500 μm d'aluminium)

B = cible RF (1 mm d'or)

C = cible d'étude de la production de

paire (20 μm d'or ou 205 μm d'aluminium)

distance $AB = 6\text{ cm}$; $AC = 260\text{ cm}$.

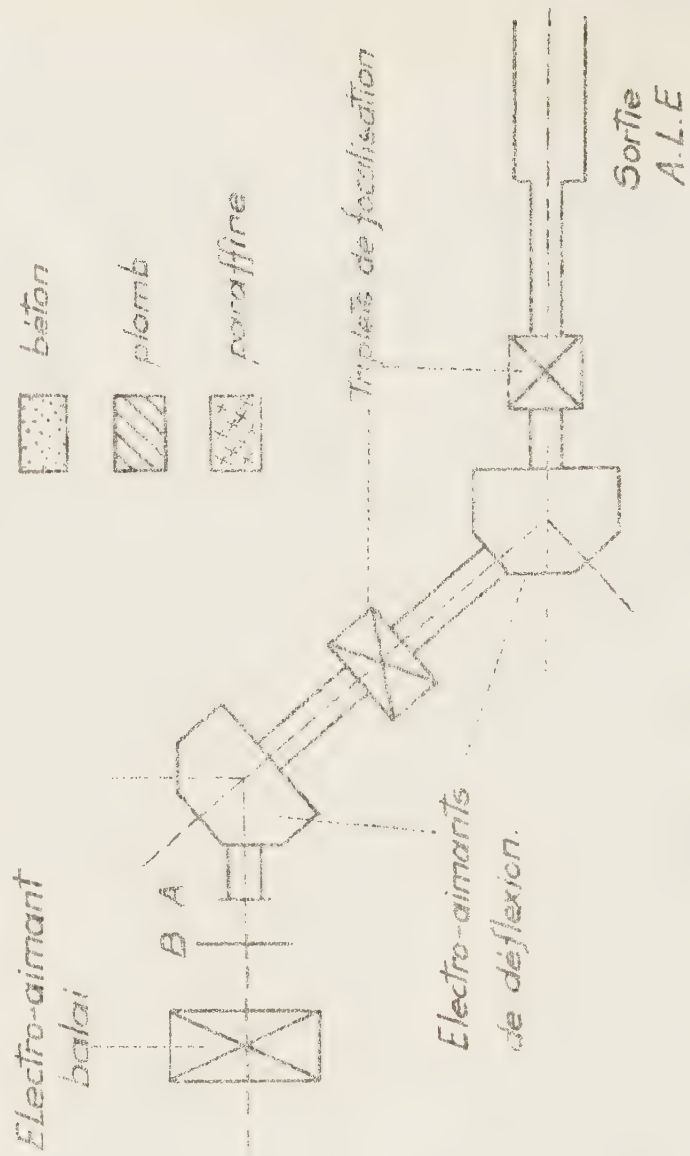


Figure 2.22 : obtention du faisceau de rayonnement de freinage.

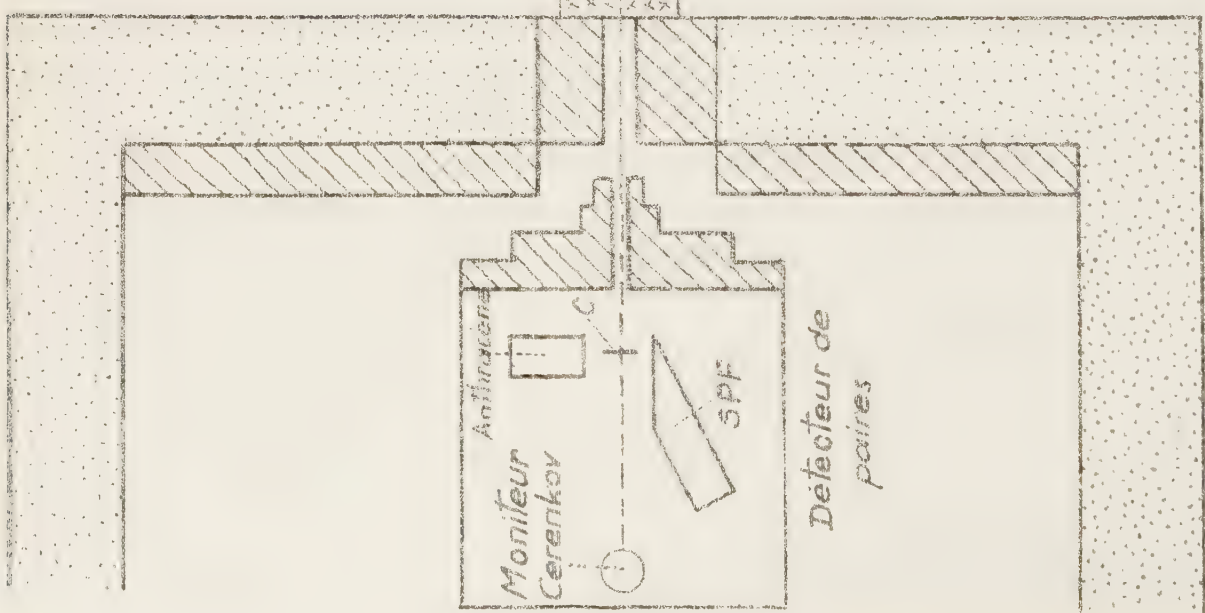


Figure 2.23 : spectre d'énergie des électrons à la sortie de l'accélérateur linéaire.

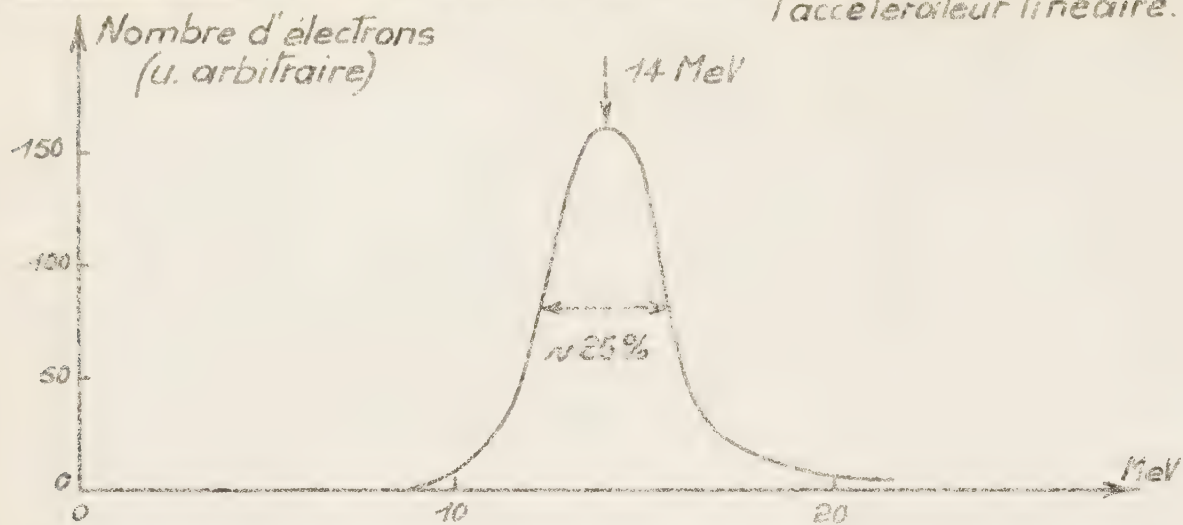


Figure 2.24 : étalonnage en énergie de la déviation électromagnétique

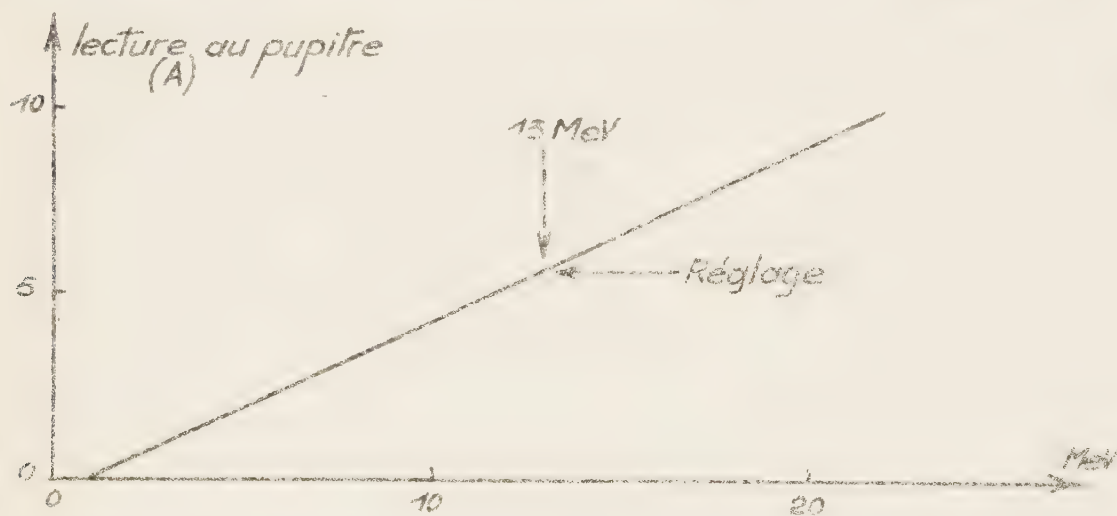
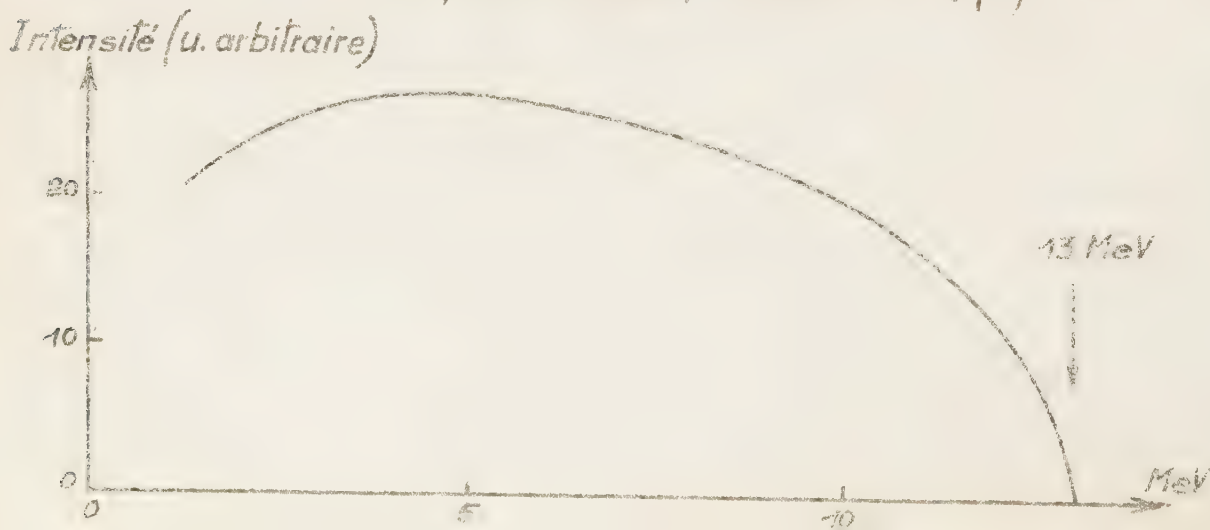


Figure 2.25 : spectre d'énergie du rayonnement de freinage "durci"; en ordonnée, intensité = $k \cdot \sigma(k)$.



CHAPITRE VII

EXPERIENCE

AVEC LE FAISCEAU DE RAYONNEMENT DE FREINAGE

L'expérience a été réalisée grâce à l'accélérateur linéaire d'électrons de 25 MeV du Centre d'Etude Nucléaire de Limeil. Les photographies des pages ci-contre présentent la salle de l'accélérateur, le détecteur et l'électronique associée.

1. Obtention du faisceau de photons.

a) Le montage : figure 2.22.

Le faisceau d'électrons sortant du guide accélérateur n'est qu'imparfaitement monocinétique (figure 2.23). La déviation électromagnétique, composée de deux électro-aimants de déflexion et de deux lentilles (triplets), permet de diriger le faisceau d'électrons sur cinq voies d'utilisation. Elle donne dans notre cas une définition en quantité de mouvement meilleure que 1 %.

La cible en or de 1 mm d'épaisseur fournit le rayonnement de freinage ; elle est notée par la suite : "cible RF". La tache du faisceau sur cette cible est de 3 cm x 1 cm (3 cm dimension horizontale). L'électro-aimant balai épure le faisceau de rayons γ par déflexion des électrons.

Le rayonnement de freinage possède un spectre où prédominent les photons de basse énergie, ce qui peut donner lieu à un bruit de fond important dans le détecteur de paires. Nous interposons donc une épaisseur de 20 cm de paraffine dont le rôle est de "durcir" le spectre de photons.

Le détecteur de paire est placé dans une casemate en béton dont les murs ont 1 m d'épaisseur et sont renforcés du côté accélérateur par une épaisseur de plomb supplémentaire (10 cm) ; le volume intérieur utile est de $1,5 \times 2 \times 1,5 \text{ m}^3$. L'entrée du faisceau dans la casemate est réalisée par un collimateur en plomb de $0,5 \times 0,5 \times 1 \text{ m}^3$ percé d'une ouverture de section circulaire (diamètre : 1,5 cm) parallèle à la grande dimension (1 m).

Le montage du système détecteur est identique au précédent (expérience avec rayons γ monochromatiques). On voit en particulier sur la figure 2.22 le collimateur en plomb cité au chapitre précédent (épaisseur : 15 cm ; section de l'ouverture : $10 \times 4 \text{ mm}^2$), collimateur qui achève la définition du faisceau γ dans la cible de matérialisation.

b) Les réglages de l'accélérateur et de la déviation électromagnétique.

La variation de l'énergie du faisceau d'électrons générateur de rayonnement de freinage est obtenue à l'aide des aimants de déflexion dont la courbe d'étalonnage est représentée figure 2.24. Il y a lieu de régler convenablement la puissance injectée dans l'accélérateur.

Au point de vue de l'intensité du courant d'électrons primaires, nous travaillons bien en-dessous des possibilités de la machine qui peut délivrer (à la fréquence de 25 Hz) des impulsions de quelques microsecondes avec un courant crête de 100 à 200 mA. L'expérience a montré qu'un courant crête voisin de 1 mA était suffisant. Dans ces conditions, les appareils de mesure de courant de l'accélérateur (tores de ferrite) ne permettaient pas d'assurer les réglages et nous avons dû placer dans la casemate, sur le trajet du faisceau γ , un moniteur réalisé à l'aide d'un détecteur Cerenkov (plexiglass + photomultiplicateur). Ce moniteur nous a permis d'ajuster les différents paramètres de l'accélérateur et de la déviation. Il sera également utilisé dans le contrôle des mesures.

Pendant toute l'expérience, l'énergie des électrons primaires est de 13 MeV. Le spectre de rayonnement de freinage durci qui atteint la cible du détecteur de paires a été calculé au Laboratoire⁽⁵²⁾. La figure 2.25

représente la distribution énergétique de l'intensité du faisceau γ calculée à partir de formules ultrarelativistes et en tenant compte de la diffusion multiple dans la "cible RF". Nous avons vérifié de plus⁽⁵²⁾ que l'introduction des pertes d'énergie par ionisation dans la "cible RF" modifie très peu la distribution énergétique précédente (pour une énergie k donnée dans le spectre, l'intensité correspondante est modifiée de quelques %).

2. La conduite des mesures.

a) Conditions expérimentales.

Le CEN de Limeil nous a permis d'utiliser l'accélérateur linéaire au cours de deux périodes : l'une de 3 semaines, l'autre d'un mois. Lors de la première période, nous avons réalisé des expériences préliminaires sur la détection et la spectrométrie des électrons de 3 à 15 MeV à l'aide de scintillateurs et de radiateurs Cerenkov⁽⁴²⁾. La période d'un mois a été consacrée à la manipulation définitive, mais 2 semaines ont été nécessaires pour la mise en place et les réglages. Il n'était donc pas possible d'obtenir une statistique suffisante pour les trois types de cibles utilisées au cours de l'expérience avec photons monochromatiques. Aussi, nous sommes-nous limités à des cibles en aluminium (205 μm) et en or (20 μm).

La vérification du déroulement des mesures est obtenue par examen des taux de comptage délivrés par les échelles du schéma synoptique. Un autre "point test" est le moniteur dont les informations sont recueillies sur échelle de comptage et sur enregistreur MECI.

L'énergie du positon est fixée à $T_1 = (1,36 \pm 1,0)\text{MeV}$ (seuil inférieur du sélecteur monocanal = 1,4 V ; seuil supérieur = 10,0 V) ou à $T_1 = (1,86 \pm 0,5)\text{MeV}$ (seuil inférieur = 5,7 V ; seuil supérieur = 10,0 V). On peut d'ailleurs par soustraction obtenir le comptage dans la bande 1,4 - 5,7 V du sélecteur monocanal, soit $T_1 = (0,86 \pm 0,5)\text{MeV}$.

Les sélecteurs sur les voies "NaI" sont largement ouverts (de 0,1 à 0,7 MeV) afin de ne pas perdre une proportion trop forte de "bons événements".

La "cible RF" est amovible par télécommande sans interruption du fonctionnement de l'accélérateur. Cela nous permet de soustraire le comptage dû au faisceau de rayons γ parasites produits par les électrons primaires heurtant les parois du tube à vide.

Figure 2.26: enregistrement sur MECI de l'information moniteur.

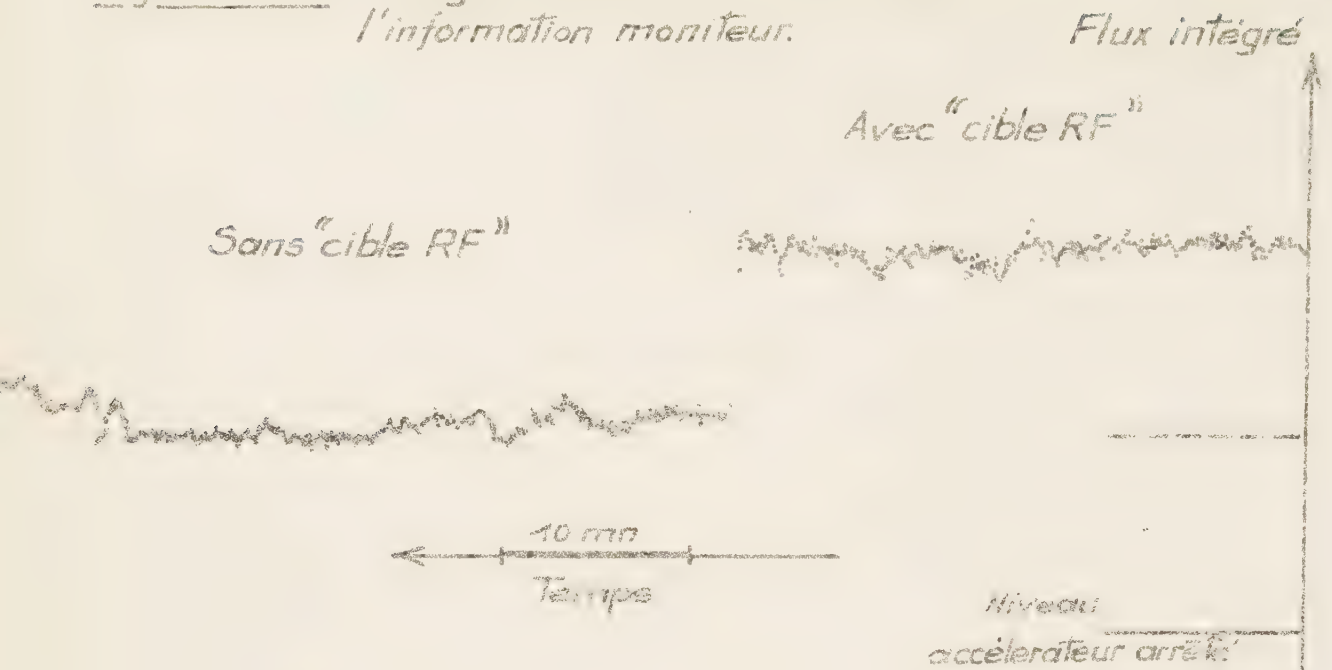
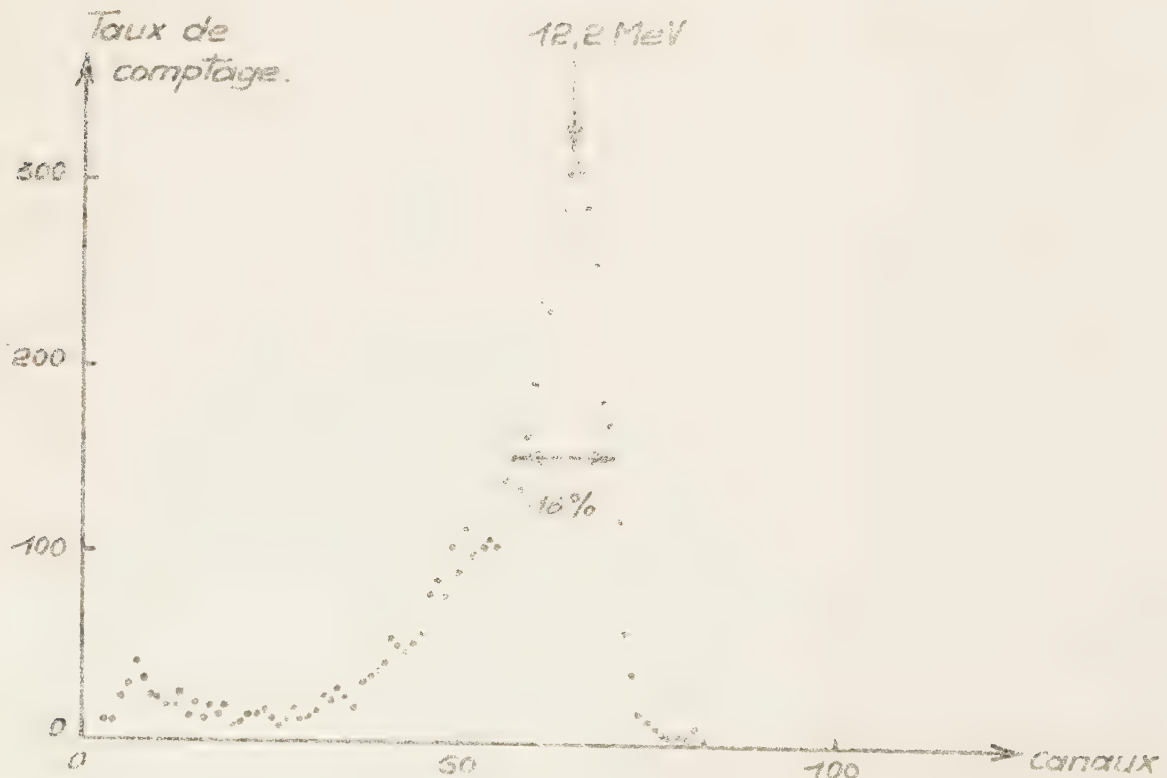


Figure 2.27: réponse du "SPF"; électrons primaires de 13 MeV.



Enfin, comme dans le cas de l'expérience à 2,62 MeV, nous devons déduire le bruit de fond produit dans le détecteur de paires (comptage en l'absence de cible de matérialisation).

Nous avons donc trois séries de mesures entre lesquelles un arrêt de l'accélérateur est nécessaire (changement de la cible du détecteur de paires) :

- avec cible d'or de 20 μm
- avec cible d'aluminium de 205 μm
- sans cible

Pour chacune de ces séries, nous réalisons quatre spectres :

A = avec "cible RF" ;	seuils	sélecteur	$T_1 = 1,4 - 10,0 \text{ V}$
B = sans	"	"	"
C = "	"	"	$5,7 - 10,0 \text{ V}$
D = avec	"	"	"

Le stockage de chaque spectre dure 1 ou 2 heures, mais la suite A-B-C-D est reproduite plusieurs fois si bien que l'on a finalement des stockages de 3 à 8 heures. Ce procédé de mesure permet de contrôler efficacement l'expérience par comparaison des différents comptages ; on élimine éventuellement les mesures aberrantes.

b) Résultats typiques.

Le tableau 2.1 donne un exemple de résultats obtenus avec l'aluminium, la fréquence de récurrence de l'accélérateur étant de 50 Hz. Les taux de comptage avec "cible RF" et sans "cible RF" sont approximativement dans un rapport 2 pour les 4 échelles "anthracène", "SPF", "NaI haut" et "NaI bas". Le nombre d'événements sélectionnés par impulsion de l'accélérateur (échelle coïncidence triple) est de l'ordre de 0,004 pour la mesure A, 0,001 pour B, 0,0002 pour C et 0,001 pour D. L'échelle moniteur compte simplement les impulsions de l'accélérateur (180000 en 1 heure). La figure 2.26 représente l'enregistrement "MECI" de l'information du moniteur.

Outre les vérifications permanentes en cours de mesure, nous vérifions à chaque arrêt de l'accélérateur les quatre voies linéaires comme au chapitre VI, figure 2.20.

Tableau 2.1 :

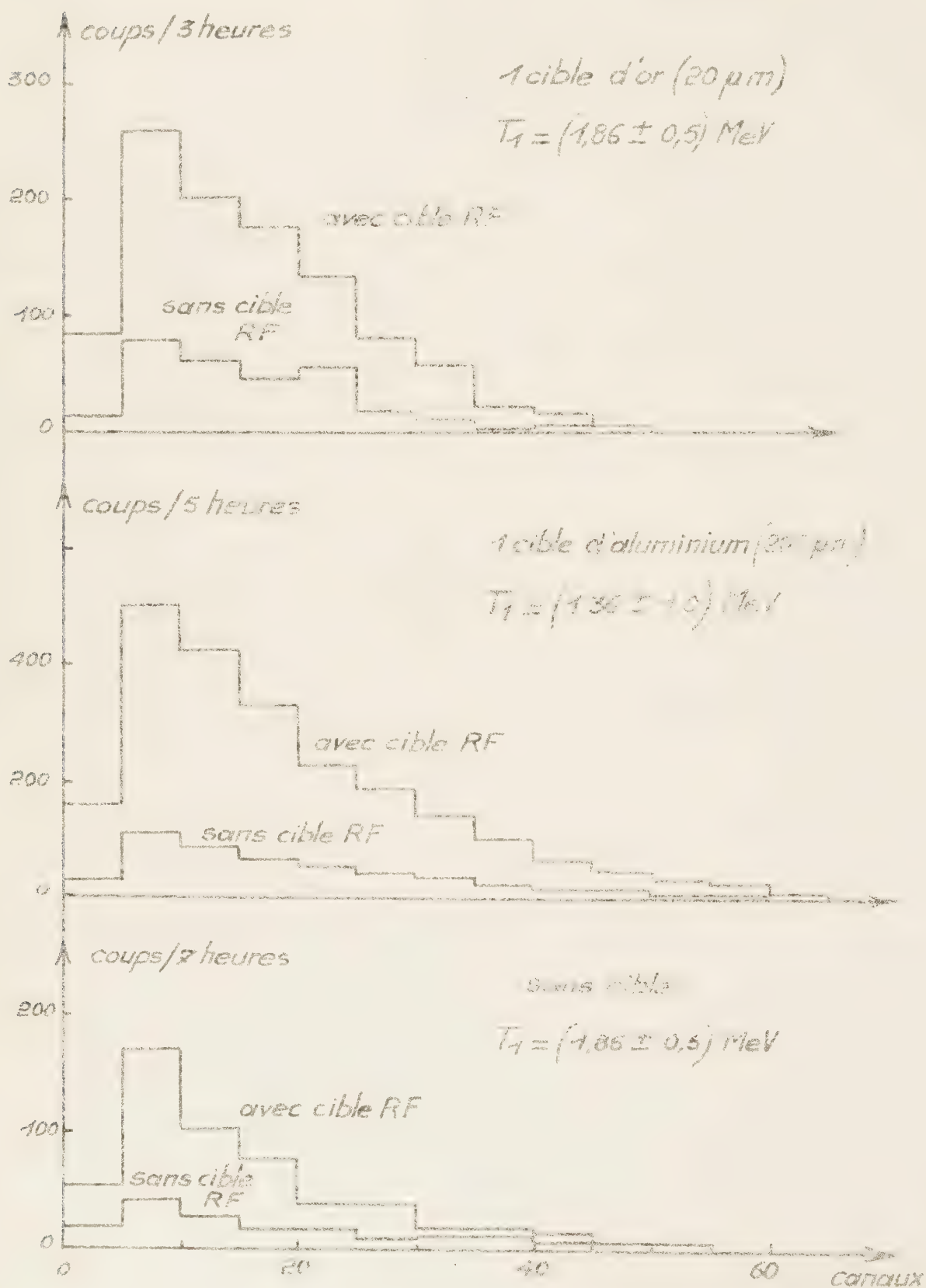
COMPTAGE SUR ECHELLE

Série	Durée (h)	Moniteur	Coïnc. tr.	Anthracène	SPF	NaI haut	NaI bas
A	1	175 583	487	739	5 252	57 847	42 599
B	1	178 990	109	379	3 325	33 605	20 327
C	2	359 053	47	807	6 692	66 438	40 882
D	2	360 219	312	1 536	11 482	129 996	95 133
D	1	179 938	182	776	5 950	67 465	49 084
A	1	178 994	717	859	6 067	66 016	48 131
B	1	179 934	178	460	3 900	42 235	25 484
C	2	348 759	91	907	7 738	83 907	50 144
D	2	360 252	398	1 812	12 589	146 015	108 802

L'étalonnage du "SPF" est obtenu en envoyant dans la casemate les électrons primaires (pas de "cible RF", pas de courant dans l'électro-aimant balai, paraffine enlevée). En réduisant le courant de l'accélérateur à zéro et grâce à l'angle solide extrêmement faible sous-tendu par la fente d'entrée du détecteur de paires, on arrive à un taux de comptage correct où le risque d'empilement est négligeable (taux de comptage inférieur à 0,1 électron par impulsion de l'accélérateur).

La figure 2.27 donne un spectre d'étalonnage du SPF avec des électrons primaires de 13 MeV. La forme dissymétrique du spectre rappelle l'allure des courbes de perte d'énergie par ionisation de Landau⁽⁵³⁾. Si on considère en effet un parcours dans l'air de 250 cm et de 500 μ m dans la fenêtre d'aluminium à la sortie de la déviation, on obtient une perte d'énergie moyenne par ionisation de 0,9 MeV. La perte d'énergie la plus probable, relative au maximum de la courbe de Landau, est un peu plus faible ; on trouve qu'elle est de 0,8 MeV. Le maximum du spectre d'étalonnage de la figure 2.27 correspond donc à une énergie de 12,2 MeV. La résolution est voisine de 18 %.

Figure P.25 : exemples de résultats bruts de l'expérience avec rayonnement de freinage.



Evaluons l'ordre de grandeur de l'efficacité de détection.

Compte tenu d'un courant crête de 1 mA et d'une largeur d'impulsion de 2 μ s, nous avons environ 10^{10} électrons par impulsion de l'accélérateur. Il faut donc 10^{12} électrons primaires pour avoir 1 événement de matérialisation (tableau 2.1, série A).

Etant données l'épaisseur de la "cible RF" et l'énergie des électrons primaires, nous admettrons qu'il faut en moyenne 10 électrons pour obtenir un photon de rayonnement de freinage d'énergie comprise entre 2 et 13 MeV. Ces photons sont émis principalement vers l'avant, dans un cône dont l'angle au sommet est de l'ordre de 0,3 radian. L'angle solide défini par l'entrée du détecteur et la "cible RF", est voisin de $6 \cdot 10^{-6}$ stéradian. Le nombre de rayons γ nécessaire pour obtenir une paire est donc :

$$\frac{10^{12}}{10} \times \frac{6 \cdot 10^{-6}}{(0,3)^2} \approx 10^7$$

Cette valeur est très approximative. Il semble que l'on puisse admettre que l'efficacité de détection est sensiblement la même que dans le cas de l'expérience avec photons monochromatiques, soit 10^6 rayons γ pour obtenir une paire avec la cible d'aluminium.

La figure 2.28 présente des spectres bruts obtenus :

avec une cible en or (20 μ m),
avec une cible en aluminium (205 μ m)
et sans cible.

CHAPITRE VIII

TRAITEMENT DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les expériences décrites aux chapitres VI et VII fournissent des spectres différentiels donnant le nombre d'impulsion $f(X) \cdot dX$ dont la hauteur est comprise entre X et $X + dX$, la hauteur d'impulsion X étant mesurée de façon commode en nombre de canaux du sélecteur d'amplitude. Le problème est de déduire du spectre d'impulsion observé $f(X) \cdot d(X)$, le spectre en énergie réel $g(T) \cdot dT$ donnant le nombre d'électrons d'énergie comprise entre T et $T + dT$.

Soit $k(X, T) \cdot dX$ le spectre différentiel obtenu lorsqu'un électron d'énergie T est détecté. On a la relation intégrale :

$$f(X) \cdot dX = dX \cdot \int_0^{T_{\max}} k(X, T) \cdot g(T) \cdot dT \quad (2.1)$$

$T_{\max}$ est l'énergie maximale des électrons ; on peut d'ailleurs prendre $T_{\max} = \infty$ avec $g(T) = 0$ pour $T > T_{\max}$. Le spectre observé $f(X) \cdot dX$ n'est qu'une représentation imparfaite du spectre réel $g(T) \cdot dT$, et cela d'autant plus que la fonction de réponse $k(X, T)$ est différente de la fonction $\delta(X - T)$.

Dans les mesures courantes, la seule correction à faire est la correction de résolution due aux phénomènes nucléaires et statistiques qui interviennent au niveau du scientillateur et du photomultiplicateur.

Dans notre cas où les mesures sont longues et où les vérifications de stabilité (figure 2.20) ont montré une dérive sensible de l'électronique, nous sommes conduits à examiner l'importance d'une correction de dérive. Nous étudierons aussi la correction d'autoabsorption dans les cibles de matérialisation.

1. Résolution de l'équation intégrale (2.1).

Nous verrons plus loin que les différentes corrections se ramènent toujours à la résolution de l'équation intégrale (2.1). La quantité expérimentale est d'ailleurs :

$$F_i = \int_{X_i - \frac{\Delta X}{2}}^{X_i + \frac{\Delta X}{2}} f(X) \cdot dX ; \quad (2.2)$$

c'est le nombre d'impulsions dans l'intervalle i de largeur ΔX . La quantité inconnue est de la même façon :

$$G_j = \int_{T_j - \frac{\Delta T}{2}}^{T_j + \frac{\Delta T}{2}} g(T) \cdot dT \quad (2.3)$$

a) Méthode matricielle.

Nous rappelons d'abord la méthode matricielle utilisée principalement dans la correction de résolution des spectres β obtenus à l'aide de scintillateurs (54, 47).

On a, d'après (2.2) et (2.1) :

$$F_i = \int_{X_i - \frac{\Delta X}{2}}^{X_i + \frac{\Delta X}{2}} dX \cdot \sum_{j=1}^n \int_{T_j - \frac{\Delta T}{2}}^{T_j + \frac{\Delta T}{2}} k(X, T) \cdot g(T) \cdot dT \quad (2.4)$$

La méthode n'est valable que pour les spectres continus où $g(T)$ varie peu dans l'intervalle $T_j - \frac{\Delta T}{2}$, $T_j + \frac{\Delta T}{2}$ et au voisinage ; on admet en première approximation, dans cet intervalle, $g(T) = g(T_j)$ et $k(X, T) = k(X, T_j)$. L'expression (2.4) s'écrit alors simplement :

$$F_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot G_j \quad (2.5)$$

avec : $G_j = g(T_j) \cdot \Delta T$

$$M_{ij} = \int_{X_i - \frac{\Delta X}{2}}^{X_i + \frac{\Delta X}{2}} k(X, T_j) \cdot dX \quad (2.6)$$

Connaissant la matrice M_{ij} , la résolution du système d'équations (2.5) conduit au spectre cherché donné sous forme matricielle par :

$$G_j = M_{ji}^{-1} \cdot F_i \quad (2.7)$$

Il nous a semblé utile de traiter l'équation (2.4) de façon un peu plus précise en utilisant par exemple la règle du trapèze :

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{j=1}^n \int_{X_i - \frac{\Delta X}{2}}^{X_i + \frac{\Delta X}{2}} dX \cdot \left[\frac{\Delta T}{4} \cdot k(X, T_j - \frac{\Delta T}{2}) \cdot g(T_j - \frac{\Delta T}{2}) + \frac{\Delta T}{2} \cdot k(X, T_j) \cdot g(T_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta T}{4} \cdot k(X, T_j + \frac{\Delta T}{2}) \cdot g(T_j + \frac{\Delta T}{2}) \right] = \\ &= \sum_j \left(\frac{1}{4} \cdot M_{i,j-1/2} \cdot G_{j-1/2} + \frac{1}{2} \cdot M_{i,j} \cdot G_j + \frac{1}{4} \cdot M_{i,j+1/2} \cdot G_{j+1/2} \right) \end{aligned}$$

Prenant :

$2 G_{j-1/2} = G_{j-1} + G_j$ et $2 G_{j+1/2} = G_j + G_{j+1}$ et de même pour $M_{i,j-1/2}$ et $M_{i,j+1/2}$, on arrive à :

$$F_i = \sum_j G_j \cdot \left(\frac{1}{8} M_{i,j-1} + \frac{6}{8} M_{ij} + \frac{1}{8} \cdot M_{i,j+1} \right)$$

D'où :

$$G_j = M'_{ji}^{-1} \cdot F_i \quad (2.8)$$

$$\text{avec : } M'_{ij} = \frac{1}{8} \cdot M_{i,j-1} + \frac{6}{8} \cdot M_{ij} + \frac{1}{8} \cdot M_{i,j+1} \quad (2.8 \text{ bis})$$

Un calcul d'erreur peut être fait avec la formule (2.7). Si on admet que la matrice M_{ij} est connue avec une erreur négligeable et que l'erreur δF_i est de caractère "statistique", on a :

$$\delta G_j = \sqrt{\sum_i (M_{ji}^{-1})^2 \cdot (\delta F_i)^2} \quad (2.9)$$

b) Utilisation du développement de Taylor.

Nous utilisons par la suite une méthode de résolution de l'équation intégrale (2.1) basée sur le développement de $g(T)$ en série de Taylor :

$$g(T) = \sum_{p=0}^m \frac{(T-X)^p}{p!} \cdot g^{(p)}(X)$$

D'où :

$$f(X) = \sum_{p=0}^m g^{(p)}(X) \cdot \frac{1}{p!} \cdot \int_0^\infty (T-X)^p \cdot k(X,T) \cdot dT$$

Posons :

$$K_p(X) = \frac{1}{p!} \cdot \int_0^\infty (T-X)^p \cdot k(X,T) \cdot dT \quad (2.10)$$

On a successivement :

$$f(X) = \sum_{p=0}^m g^{(p)}(X) \cdot K_p(X) \quad (2.11)$$

$$F_i = \sum_{p=0}^m \int_{X_i - \frac{\Delta X}{2}}^{X_i + \frac{\Delta X}{2}} g^{(p)}(X) \cdot K_p(X) \cdot dX = \sum_{p=0}^m G_i^{(p)} \cdot K_{pi}$$

avec $K_{pi} = K_p(X_i)$. Pratiquement, on se limite toujours au 2e ordre :

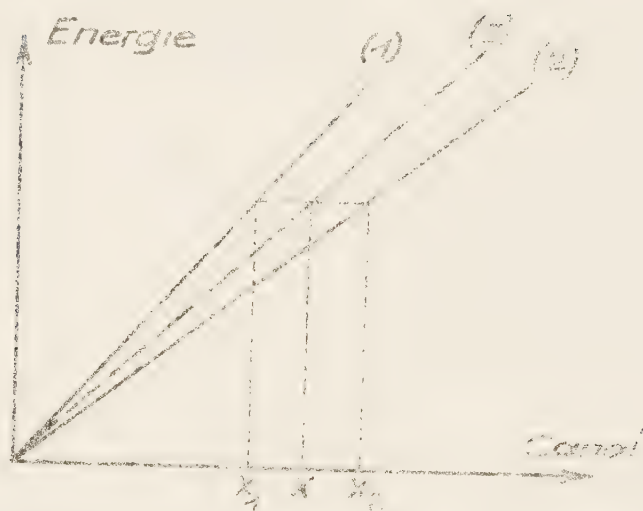
$$F_i = K_{0i} \cdot G_i + K_{1i} \cdot G'_i + K_{2i} \cdot G''_i + \dots$$

Considérant les termes $p \geq 1$ comme correctifs, on fait : $G'_i = F'_i$, $G''_i = F''_i$, ... D'où :

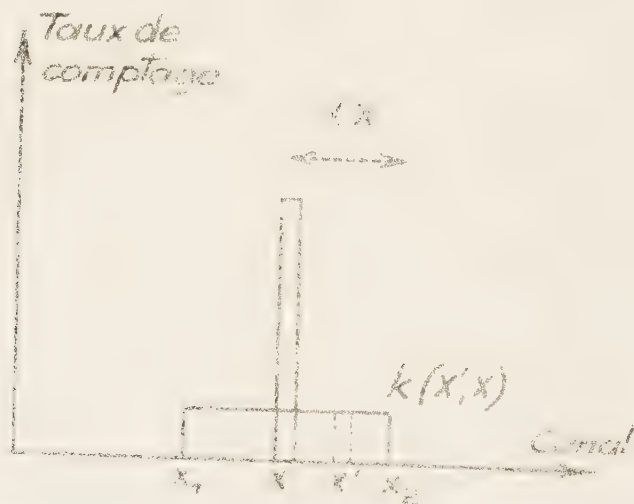
$$K_{0i} \cdot G_i = F_i - K_{1i} \cdot F'_i - K_{2i} \cdot F''_i - \dots$$

Figure 2.29.

2.29 a.



2.29 b.



Enfin :

$$F'_i \sim \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta} \quad \text{avec } \Delta \equiv \Delta X ;$$

$$F''_i \sim \frac{F'_{i+1/2} - F'_{i-1/2}}{\Delta} = \frac{F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}}{\Delta^2}$$

$$K_{oi} \cdot G_i = F_i - \frac{K_{1i}}{2\Delta} \cdot (F_{i+1} - F_{i-1}) - \frac{K_{2i}}{\Delta^2} (F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}) - \dots \quad (2.12)$$

Dans la mesure où les termes correctifs ne sont pas trop importants, nous prenons l'erreur $\delta G_i = \delta F_i$.

2. Correction de dérive.

Les vérifications de stabilité faites au cours des expériences permettent de tracer les droites d'étalonnage énergie-canal du sélecteur d'amplitude avant et après stockage d'un spectre de paires, ainsi qu'une droite d'étalonnage moyenne (figure 2.29a). Soit X le canal qui stockerait une information donnée en l'absence de dérive. La dérive de l'électronique a pour effet de stocker ces informations dans les canaux X' compris entre X_1 et X_2 (figure 2.29b). Nous supposons que la dérive est constante en fonction du temps (entre les vérifications (1) et (2) avant et après mesure) et qu'elle ne détruit pas la linéarité canal-énergie. Nous introduirons le coefficient caractéristique :

$$\alpha = \frac{X_2 - X_1}{2X}$$

Normalisant $k(X', X)$, nous avons (figure 2.29b) :

$$(X_2 - X_1) \cdot k = 2\alpha X \cdot k = 1 ;$$

$$\begin{aligned} k(X', X) &= \frac{1}{2\alpha X} \quad \text{pour } X_1 \leq X' \leq X_2 \\ &= 0 \quad \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

Le taux de comptage observé dans le canal X' est :

$$f(X') \cdot dX' = dX' \cdot \int_{X_1}^{X_2} k(X', X) \cdot g(X) \cdot dX ,$$

$g(X) \cdot dX$ étant le taux de comptage réel inconnu. C'est une équation

intégrale du type (2.1). Les limites sont telles que $X_1 + \alpha X_1 = X'$ et $X_2 - \alpha X_2 = X'$. D'où :

$$f(X') \cdot dX' = dX' \cdot \int_{\frac{X'}{1+\alpha}}^{\frac{X'}{1-\alpha}} \frac{1}{2\alpha X} \cdot g(X) \cdot dX$$

Nous utilisons les formules (2.10) et (2.11) précédentes, d'où :

$$K_0(X') = \int_{\frac{X'}{1+\alpha}}^{\frac{X'}{1-\alpha}} \frac{dX}{2\alpha X} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \text{Log} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) = 1 + \frac{\alpha^2}{3} + \dots$$

$$K_1(X') = \int_{\frac{X'}{1+\alpha}}^{\frac{X'}{1-\alpha}} \frac{X-X'}{2\alpha X} \cdot dX = \frac{2\alpha^2}{3} \cdot X' + \dots$$

$$K_2(X') = \frac{\alpha^2}{6} X'^2 + \dots$$

$$f(X') = g(X') + \frac{\alpha^2}{3} \cdot \left[g(X') + 2X' \cdot g'(X') + \frac{X'^2}{2} \cdot g''(X') + \dots \right] + \dots \quad (2.13)$$

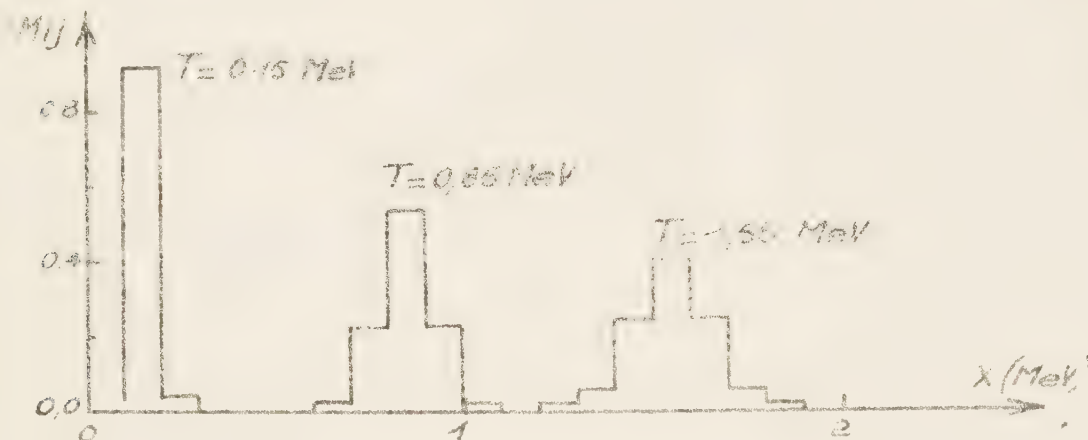
On trouve donc que la correction de dérive est en α^2 . Or, expérimentalement, les plus grandes valeurs de α déduites de courbes analogues à celles de la figure 2.20 sont de 0,06 pour l'expérience avec rayons γ monochromatiques et de 0,04 pour l'expérience avec rayonnement de freinage. On a : $\alpha^2/3 \lesssim 0,001$; aussi négligeons-nous dans tous les cas la correction de dérive sur le spectre lui-même. La seule influence sensible de la dérive porte sur la normalisation des abscisses en énergie. Le coefficient de normalisation peut varier d'un spectre à l'autre : il est calculé à l'aide d'une droite d'étalonnage moyenne telle que la droite (3) de la figure 2.29a.

Remarque.

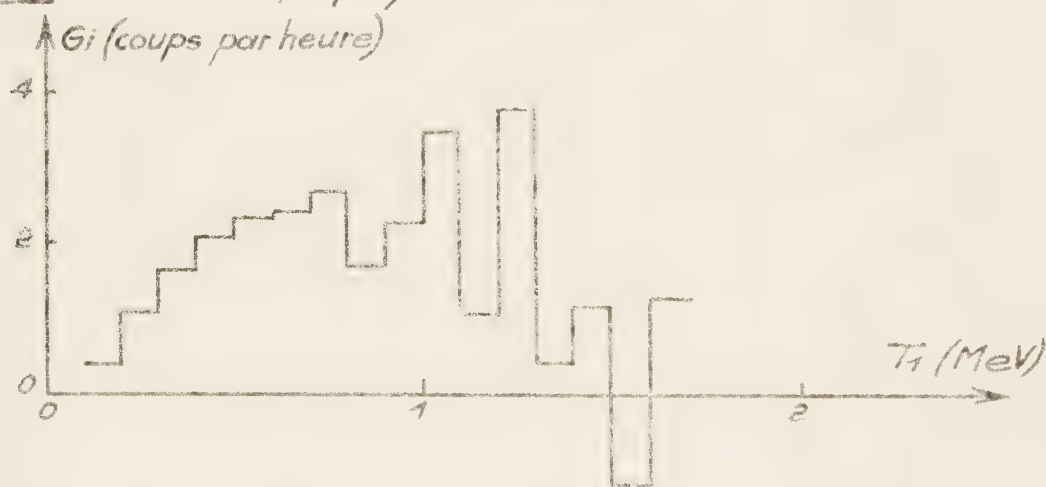
La dérive des voies "NaI" modifie la surface des spectres. Dans l'expérience avec rayons γ monochromatiques, cette modification est au plus de 4 %. Nous l'introduisons de façon globale dans le calcul d'erreur.

Figure 2.30: correction de résolution par la méthode matricielle; formules (2.7) et (2.9).

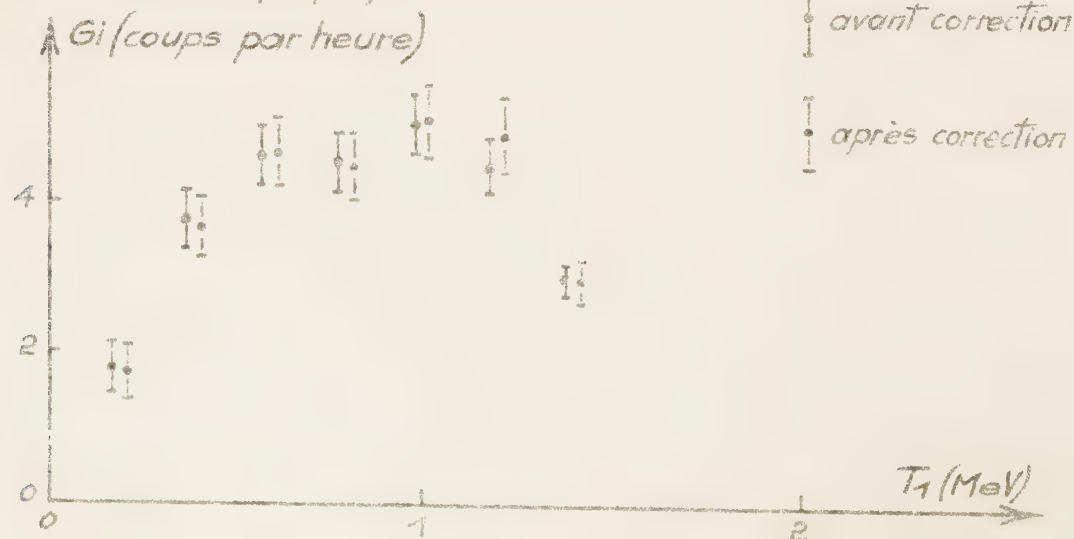
2.30.a: matrice de résolution.



2.30.b: 1 cible d'or ($10 \mu\text{m}$); $\Delta = 100 \text{ keV}$.



2.30.c: 1 cible d'or ($10 \mu\text{m}$); $\Delta = 200 \text{ keV}$.



Soient N et N_0 les comptages par intervalle d'énergie avec cible et sans cible, t et t_0 les temps correspondants. La soustraction du bruit de fond fournit $\frac{N}{t} - \frac{N_0}{t_0}$. Nous calculons l'erreur sur cette quantité en introduisant en plus des erreurs statistiques sur N et N_0 une incertitude de 4 % sur le temps, ce qui donne en désignant par σ l'écart type cherché:

$$\sigma = \left\{ \frac{N}{t^2} \cdot (1 + 0,0016 \cdot N) + \frac{N_0}{t_0^2} \cdot (1 + 0,0016 \cdot N_0) \right\}^{1/2}$$

Nous tiendrons compte aussi de la dérive des voies "NaI" dans l'expérience de Limeil : voir p.88 - 89.

3. Correction de résolution.

La correction de résolution ne sera faite que dans le cas de l'expérience avec rayons γ monochromatiques.

a) Méthode matricielle.

L'étalonnage de l'anthracène nous a donné la réponse $k(X, T)$ du détecteur à scintillation pour deux valeurs de l'énergie T (0,624 MeV et 0,976 MeV). Dans les conditions actuelles, la réponse est purement gaussienne (rétrodiffusion éliminée):

$$k(X, T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{X-T}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (2.14)$$

On admet que le pouvoir de résolution est proportionnel à $1/\sqrt{T}$ ⁽⁴²⁾ d'où il résulte que l'écart type $\sigma = a\sqrt{T}$, a étant une constante que l'on déduit des spectres obtenus avec ^{137}Cs et ^{207}Bi . On peut alors calculer la matrice M_{ij} introduite p.75 et calculer le spectre corrigé par les relations (2.7) ou (2.8).

Les calculs numériques sont faits sur CDC 6600 ou IBM 1620. La figure 2.30 montre un exemple de résultat fourni par la méthode matricielle. La conclusion qui s'en dégage est que la méthode matricielle n'est pas adaptée lorsque la statistique n'est pas très bonne et le spectre lentement variable. On sait que cette méthode conduit à des oscillations dans le spectre corrigé dues aux oscillations de signe dans la matrice inverse^(54,47). Ces oscillations deviennent d'autant plus importantes que

la statistique est moins bonne ; c'est ce que l'on observe sur le spectre de la figure 2.30.b où l'on a pris $\Delta = 100\text{keV}$ comme intervalle d'énergie. Lorsque les intervalles d'énergie sont plus grands ($\Delta = 200\text{keV}$), la méthode fournit un spectre corrigé correct mais très peu différent du spectre non corrigé ; cela est normal car les courbes de Gauss sont alors pratiquement contenues dans un intervalle d'énergie ($M_{ij} \simeq 1$ pour $i = j$ et $\simeq 0$ pour $i \neq j$).

b) Utilisation du développement de Taylor.

La méthode de calcul basée sur le développement en série de Taylor montre de façon précise que la correction dépend du rapport σ/Δ (σ : écart type de la distribution $k(X,T)$; Δ : intervalle d'énergie).

Nous devons d'abord calculer les $K_p(X)$ de la formule (2.10) étant donné (2.14) :

$$K_p(X) = \frac{1}{p!} \cdot \int_0^\infty (T - X)^p \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2\left(\frac{T-X}{\sigma}\right)^2} \cdot dT \quad (2.15)$$

avec $\sigma = a\sqrt{T}$. En fait $k(X,T)$ n'est important que pour T voisin de X et varie peu dans cet intervalle. Nous prendrons dans la formule (2.15) : $\sigma = \sigma(X) = a\sqrt{X}$. Posant $x = \frac{T-X}{\sigma}$, on a successivement :

$$K_p(X) = \frac{\sigma^p(X)}{\sqrt{2\pi} \cdot p!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^p \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

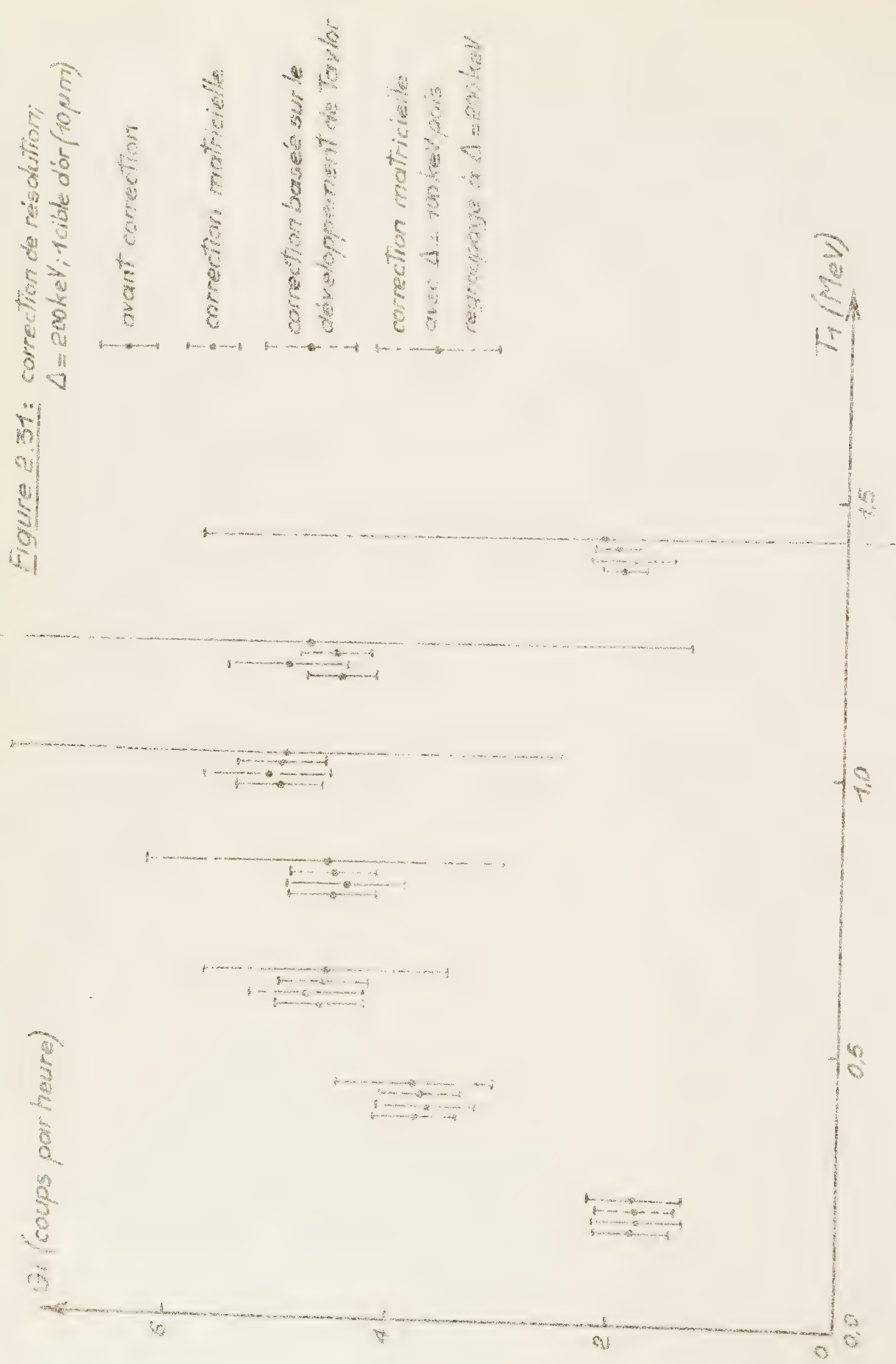
$$K_0(X) = 1 ; K_1(X) = 0 ; K_2(X) = \frac{\sigma^2(X)}{2} ; K_3(X) = 0 ; K_4(X) = \sigma^4(X)/8$$

D'après (2.12) :

$$G_i = F_i - \frac{\sigma^2(X_i)}{2\Delta^2} \cdot (F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}) - \frac{\sigma^4(X_i)}{8\Delta^4} \cdot (F_{i+2} - 4F_{i+1} + 6F_i - 4F_{i-1} + F_{i-2}) \quad (2.16)$$

Le premier terme correctif est du 2e ordre en σ/Δ . Dans Les calculs, nous limitons d'ailleurs l'expression (2.16) au terme en σ^2 . Cette formule montre clairement que la correction est négligeable si l'intervalle d'énergie Δ est grand et σ^2/Δ^2 négligeable.

Figure 2.31: correction de résolution;
 $\Delta = 200 \text{ keV}$; 1 cible d'or ($10 \mu\text{m}$)



Dans l'expérience avec rayons γ monochromatiques que nous considérons actuellement, nous avons : $\sigma = 0,0762 \cdot \sqrt{T}$ (T étant exprimé en MeV). Pour $T = 1\text{MeV}$ et $\Delta = 0,1\text{MeV}$, $\sigma/\Delta = 0,76$ et $\sigma^2/2\Delta^2 = 0,29$; alors que pour $\Delta = 0,2\text{MeV}$, $\sigma^2/2\Delta^2 = 0,07$. De plus, dans la formule (2.16), les différences secondes $F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}$ sont en général petites, le spectre ne présentant pas de pic. On peut donc prévoir que la correction sera faible.

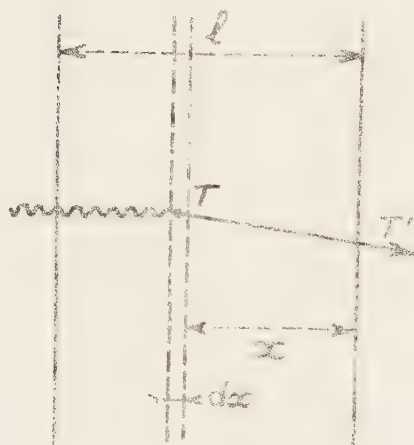
La figure 2.31 représente un spectre obtenu avec une cible en or de $10 \mu\text{m}$ avant et après correction de résolution, la correction étant faite par les deux méthodes. On voit que la méthode matricielle et la deuxième méthode donnent les mêmes résultats aux erreurs près. On a porté également un spectre obtenu par correction matricielle avec $\Delta = 100\text{keV}$ un regroupage à $\Delta = 200\text{keV}$ ayant été fait après correction ; les points expérimentaux concordent avec les résultats précédents mais les erreurs sont considérables. Cela rejoint les conclusions de Rand⁽⁵⁴⁾ ; cet auteur montre en effet que, dans la méthode matricielle, la précision est meilleure lorsque le groupage des intervalles est fait avant correction.

Nous ne ferons pas de correction de résolution dans l'expérience avec rayonnement de freinage car la statistique n'y est pas suffisante pour prendre de petits intervalles d'énergie dans le spectre corrigé. Nous adopterons : $1 \text{ MeV} \leq \Delta \leq 2\text{MeV}$. Avec les résolutions mesurées (figure 2.27), le rapport σ/Δ est alors du même ordre que pour la figure 2.31, où l'on voit que la correction de résolution est négligeable : le terme correctif calculé par le développement de Taylor est environ 10 fois plus petit que l'écart type.

4. Correction d'autoabsorption dans les cibles.

Pour le négaton, nous négligeons toujours l'autoabsorption dans la cible : elle ne modifie pas le spectre du positon dans le cas de l'expérience avec rayons γ monochromatiques et n'a pas à intervenir ; dans le cas de l'expérience avec rayonnement de freinage, la perte d'énergie moyenne de 40 keV (cf. p. 64) est toujours négligeable par rapport aux énergies mises en jeu ($T_2 > 1\text{MeV}$).

Figure 2.52



Dans le cas de l'expérience de Limeil, la correction d'auto-absorption consiste simplement à ajouter 40 keV aux valeurs moyennes de T_1 correspondant à l'étalonnage de l'anthracène et du sélecteur mono-canal. Cette correction est incluse dans les valeurs données p. 69. Nous faisons donc la correction uniquement sur les spectres de positon obtenus avec rayons γ de 2,62 MeV.

Dans ces conditions, on se limite aux pertes d'énergie par ionisation, les pertes par radiation étant négligeables (le rapport des sections efficaces des deux phénomènes -ionisation et radiation- est toujours supérieur à 5 ; il est égal à 5 dans le cas limite $Z \approx 79$ et $T_1 = 1,5$ MeV).

Soient (figure 2.32) :

$k(x, T', T)$ la densité de probabilité pour qu'un électron d'énergie T se retrouve avec une énergie T' après traversée d'une cible d'épaisseur x ;

$f(T') \cdot dT'$ le spectre expérimental après les corrections précédentes ;

$g(T) \cdot dT$ le spectre théorique cherché.

On a :

$$f(T') \cdot dT' = \int_{x=0}^1 \frac{dx}{1} \cdot \int_{T=T'}^{\infty} g(T) \cdot dT \cdot k(x, T', T) \cdot dT' \quad (2.17)$$

l étant l'épaisseur de la cible. Posant :

$$u(T', x) = \int_{T=T'}^{\infty} k(x, T', T) \cdot g(T) \cdot dT \quad (2.18)$$

nous retrouvons une équation intégrale du type (2.1).

Les études théoriques ou expérimentales que l'on trouve dans la littérature^(53,55,56,57) concernent généralement la probabilité $W(x, Q) \cdot dQ$ de perte d'énergie Q à la traversée d'une cible d'épaisseur x . Dans notre cas, on a : $Q = T - T'$ et $W(x, Q) \cdot dQ = k(x, T', T) \cdot dT$. On introduit la quantité sans dimension λ :

$$\lambda = \frac{Q - Q_0}{\alpha x} = \frac{T - T' - Q_0}{\alpha x} \quad (2.19)$$

avec :

Q_0 = perte d'énergie la plus probable

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \alpha x \cdot \left[\text{Log } \alpha x - \text{Log} \frac{I^2(1-\beta^2)}{2mc^2 \cdot \beta^2} - \beta^2 + 0,423 \right] \\ \alpha &= 154 \cdot \frac{Z}{A} \cdot \frac{\rho}{\beta^2} \text{ en keV.cm}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

ρ = masse volumique ; $\beta = v/c$; $mc^2 = 511 \text{ keV}$;

$I = I_0 \cdot Z$ = potentiel d'ionisation moyen de l'atome ; $I_0 = 13,5 \text{ eV}$.

D'où :

$$W(x, Q) \cdot dQ = k(x, T', T) \cdot dT = \chi(\lambda) \cdot d\lambda \quad (2.21)$$

$\chi(\lambda)$ étant une fonction universelle donnée par Landau pour les éléments légers et corrigée par Blunck et Leisegang⁽⁵⁵⁾ pour Z élevé.

Blunck et Leisegang approximent $\chi(\lambda)$ par une série de 4 courbes de Gauss :

$$\chi(\lambda) = \sum_{v=1}^4 \frac{c_v \cdot \gamma_v}{\sqrt{\gamma_v^2 + b^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(\lambda - \lambda_v)^2}{\gamma_v^2 + b^2} \right] \quad (2.22)$$

où c_v, γ_v, λ_v sont des constantes données par le tableau 2.2. La quantité b est nulle dans la théorie de Landau. Elle est introduite par Blunck et Leisegang pour tenir compte d'un effet de résonance lié à la présence de niveaux électroniques discrets au sein de l'atome. Il donnent :

$$b^2 = \frac{3}{Z\alpha x} \cdot \sum_s n_s \cdot I_s \cdot \text{Log}\left[\frac{2T}{I_s(1-\beta^2)} \right] \quad (2.23)$$

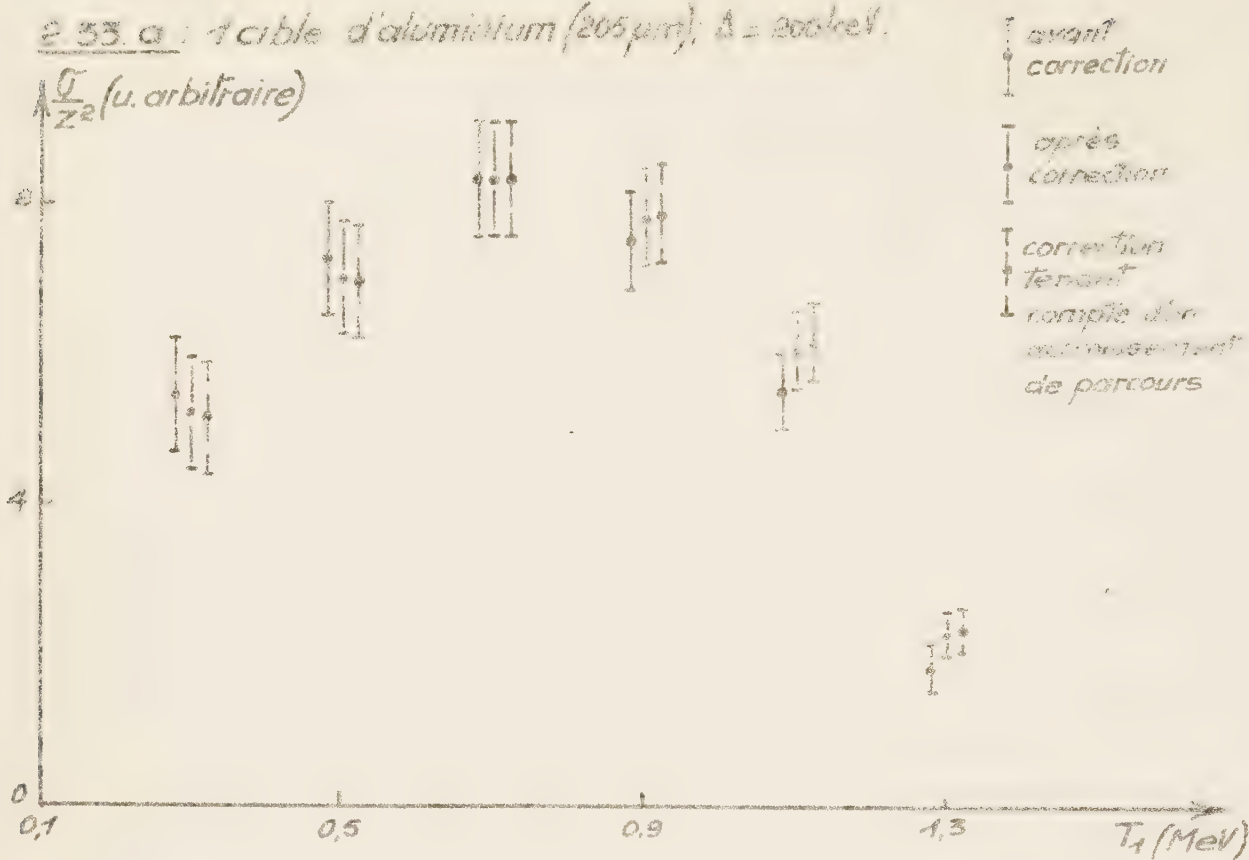
avec n_s = nombre d'électrons sur le $s^{\text{ième}}$ niveau d'énergie dont le potentiel d'ionisation est I_s ⁽⁵⁸⁾.

Tableau 2.2

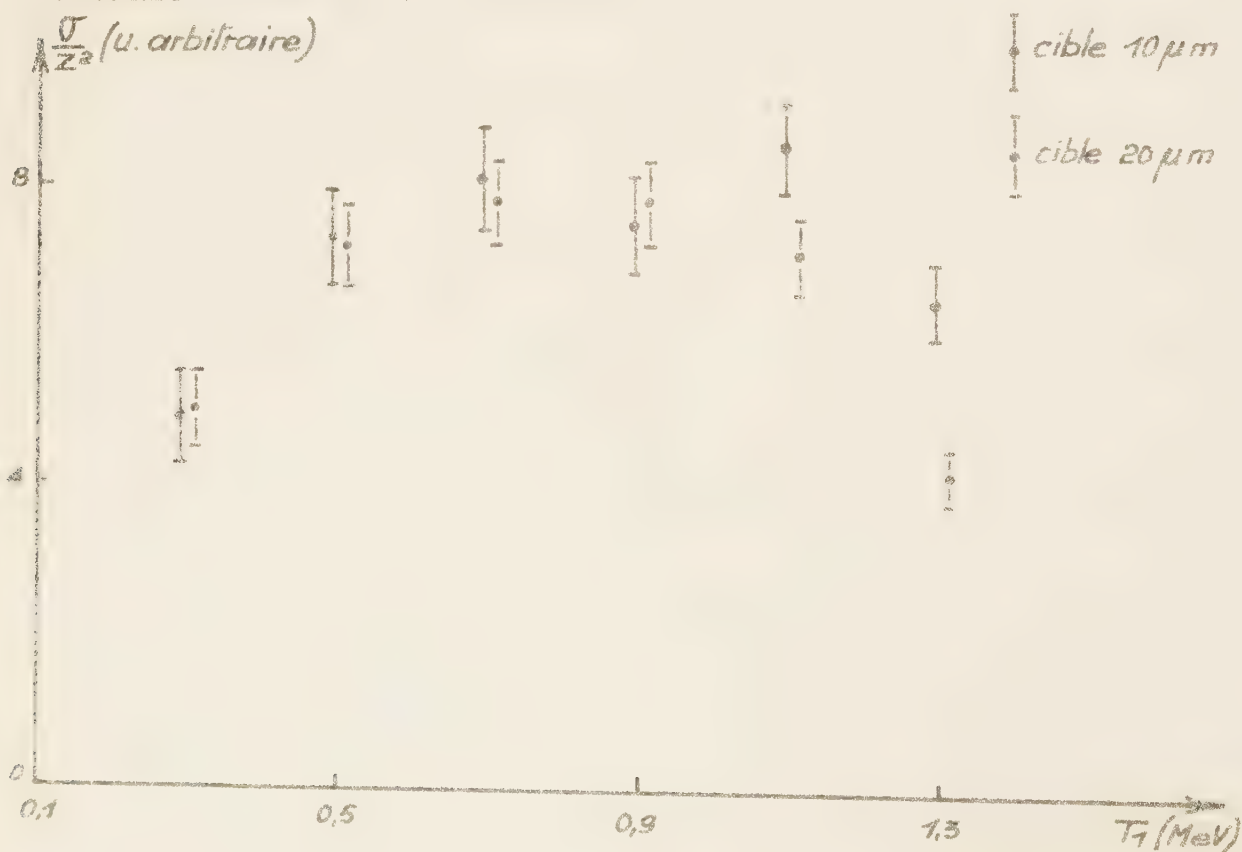
v	1	2	3	4
c_v	0,174	0,058	0,019	0,007
λ_v	0,0	3,0	6,5	11,0
γ_v	1,8	2,0	3,0	5,0

Figure 2.33 : correction d'autoabsorption.

2.33.a : 1 cible d'aluminium (205 μm); $\Delta = 200 \text{ keV}$.



2.33.b : 1 cible d'or ; $\Delta = 200 \text{ keV}$.



Numériquement, conformément à la page 64, nous avons, d'après (2.20) :

$$\Sigma \simeq 1,5 \text{ keV}$$

$$Q_0(1) \simeq 30 \text{ keV pour l'or (20 } \mu\text{m)}$$

$$Q_0(1) \simeq 40 \text{ keV pour l'aluminium (205 } \mu\text{m)} \quad \text{et } T_1 = 1 \text{ MeV}$$

On a donc dans (2.25) :

$$Y_1(T') \simeq Q_0(1)/2 \quad \text{et} \quad Y_2(T') \simeq Q_0^2(1)/6 \quad (2.27)$$

Les termes correctifs dans (2.26) sont voisins de $\frac{1}{4} \cdot \frac{Q_0(1)}{\Delta}$ et de $\frac{1}{6} \cdot \frac{Q_0^2(1)}{\Delta^2}$, ce qui donne respectivement dans le cas de l'aluminium :

$$0,10 \text{ et } 0,03 \text{ pour } \Delta = 100 \text{ keV ,}$$

$$0,05 \text{ et } 0,007 \text{ pour } \Delta = 200 \text{ keV.}$$

On peut donc prévoir que la correction d'absorption sera faible (bien qu'elle soit du premier ordre et non du second ordre comme la correction de résolution).

Les calculs numériques de correction d'absorption ont été faits sur IBM 1620 à l'aide de la formule (2.26) et des formules complètes (2.25).

La figure 2.33a montre un spectre obtenu avec la cible d'aluminium de 205 μm , avant et après correction. On voit que la correction, bien que faible, relève assez sensiblement les points expérimentaux du côté des hautes énergies, alors qu'ils sont abaissés du côté des basses énergies.

La figure 2.33b représente les courbes corrigées dans les deux cas : une cible d'or de 10 μm et une cible d'or de 20 μm . La quantité portée en ordonnée est proportionnelle à la section efficace par noyau (on a divisé les taux de comptage par le nombre d'atome par cm^2). Les spectres coïncident aux écarts type près, ce qui vérifie la validité des calculs (et de l'expérience).

On a constaté que la correction de Blunck et Leisegang (avec b^2) n'apporte pas de différence sensible par rapport à la correction de Landau ($b^2 = 0$), les termes correctifs étant toujours faibles. Toutefois, les calculs définitifs sont faits en conservant b^2 dans l'expression (2.22).

Remarque 1.

Dans le cas des spectres de négaton de l'expérience de Limeil, nous avons T_2 moyen voisin de 5 MeV et d'après (2.20), $Q_0(1) \simeq 45$ keV pour l'aluminium, $Q_0(1) \simeq 35$ keV pour l'or. Les formules approchées (2.27) donnent pour les termes correctifs de la relation (2.26), dans le cas de l'aluminium et $\Delta = 1$ MeV :

$$\frac{1}{4} \frac{Q_0(1)}{\Delta} \sim 0,01 \quad ; \quad \frac{1}{6} \frac{Q_0^2(1)}{\Delta^2} \sim 0,0003$$

On voit que la correction d'autoabsorption, environ 10 fois plus faible que dans le cas des spectres de positon (cf. p. 85), est donc négligeable.

Remarque 2.

Nous avons négligé dans les calculs l'accroissement de parcours dû à la diffusion multiple et à l'angle d'ouverture de la paire. Sur la figure 2.33.a, on a porté un spectre où l'on a tenu compte dans la correction d'un accroissement de parcours de 12,5 % dû à l'angle d'émission θ_1 de 0,5 rad, soit 30°. On voit que cet accroissement de parcours modifie très peu la 1^{re} correction, elle-même déjà faible ; nous le négligeons dans les calculs définitifs.

5. La normalisation des spectres expérimentaux de négatons.

La normalisation des spectres est un point délicat dans les conditions expérimentales où nous nous trouvons à Limeil. Le moniteur Cerenkov était primitivement destiné à ce rôle de normalisation, mais nous avons dû l'utiliser aux fins de réglages (cf. p. 68). Finalement, la comparaison des différents comptages nous a montré que l'on pouvait utiliser l'une des échelles placées sur les voies "NaI"⁽⁵⁹⁾. En effet, le comptage global du "scintillateur NaI" n'est que très peu perturbé par la présence de la cible de matérialisation, par suite du taux très faible de "bons événements" (au maximum 1 pour 1 000 coups de l'échelle "NaI haut"). Nous utilisons donc cette échelle "NaI haut" comme moniteur du faisceau γ .

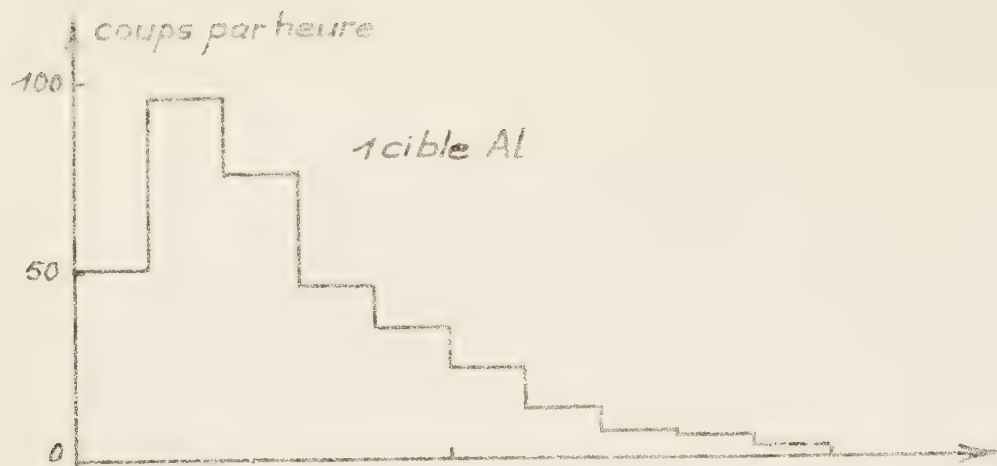
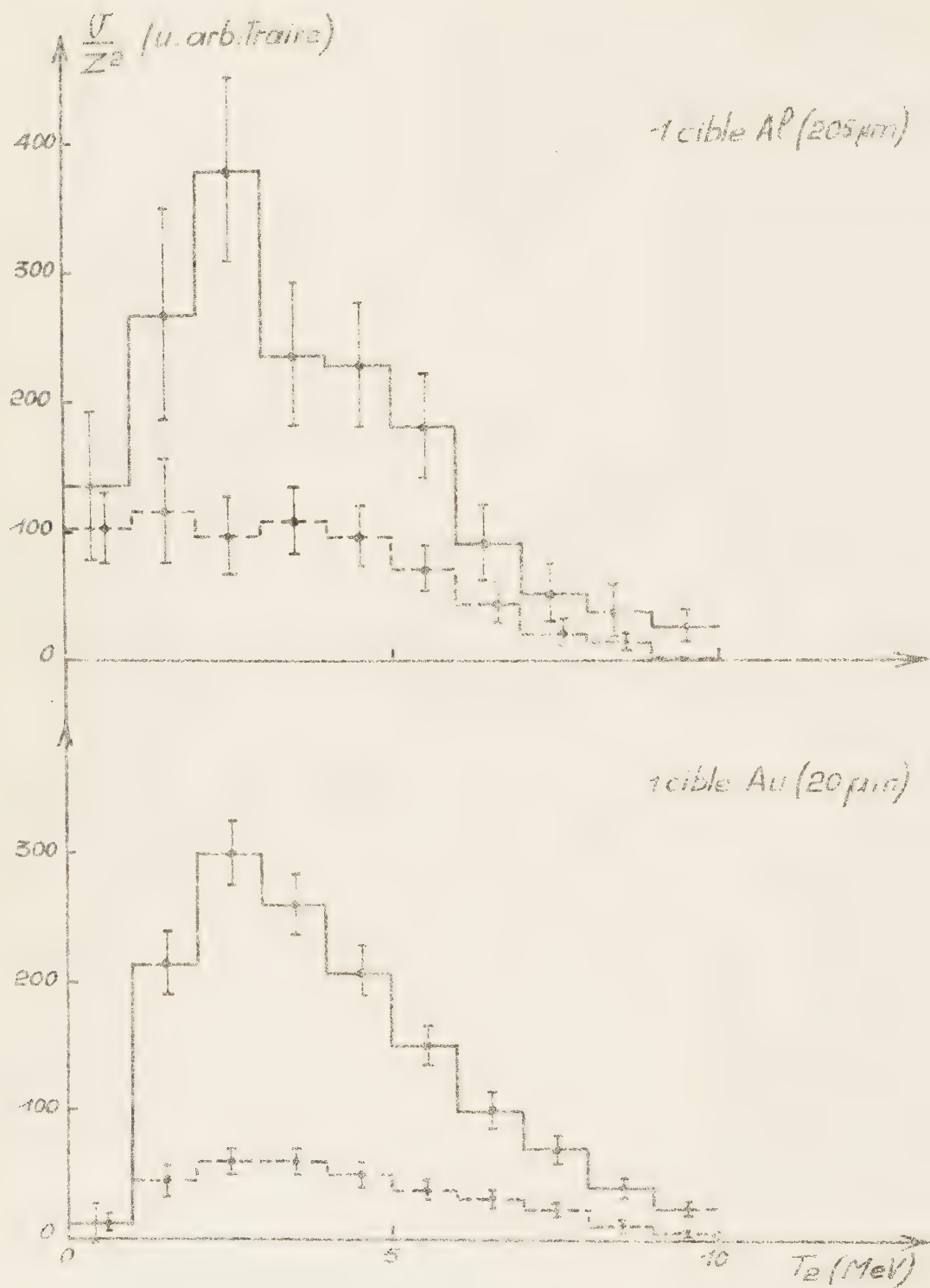


Figure 2.34 :
spectres "RF" après
soustraction: "avec cible RF -
sans cible RF"; $T_1 = (1,36 \pm 1,9)$
MeV.



Figure 2.35: expérience avec rayonnement de freinage; spectres normalisés.



$\square$ $T_1 = (1,36 \pm 1,0) \text{ MeV}$

$\cdots$ $T_1 = (1,36 \pm 0,5) \text{ MeV}$

Les flux γ intégrés sont alors proportionnels aux quantités :

$$\begin{aligned}M_A^{(1)} - M_B^{(1)} & \text{ pour le spectre 1} \\M_A^{(2)} - M_B^{(2)} & \text{ pour le spectre 2} \\M_A^{(3)} - M_B^{(3)} & \text{ pour le spectre 3} \\M_D^{(1)} - M_C^{(1)} & \text{ pour le spectre 1'} \\M_D^{(2)} - M_C^{(2)} & \text{ pour le spectre 2'} \\M_D^{(3)} - M_C^{(3)} & \text{ pour le spectre 3' .}\end{aligned}$$

D'où la normalisation et la soustraction du comptage sans cible :
figure 2.35 ; l'erreur indiquée sur les spectres est l'erreur statistique.

Le procédé de normalisation a été vérifié par référence à une expérience assez rapide au cours de laquelle la stabilité de l'accélérateur était bonne, même après arrêt et remise en route⁽⁵⁹⁾.

Après normalisation, les rapports des comptages globaux (spectres intégrés) sont (SC = sans cible) :

$$\begin{aligned}\text{seuils 1,4-10,0 V : } & \text{Al / SC } \sim 1,7 \\& \text{Au / SC } \sim 2,9 \\& (\text{Au-SC}) / (\text{Al-SC}) \sim 2,8 \\ \text{seuils 5,7-10,0 V : } & \text{Al / SC } \sim 2,4 \\& \text{Au / SC } \sim 3,3 \\& (\text{Au-SC}) / (\text{Al-SC}) \sim 1,7\end{aligned}$$

Dans l'expérience avec rayons γ monochromatiques, nous avons
(cf. p. 66) :

$$\begin{aligned}\text{Al / SC} & \sim 2 \\ \text{Au / SC} & \sim 5,5 \\ (\text{Au-SC}) / (\text{Al-SC}) & \sim 4,5\end{aligned}$$

Les rapports Al/SC sont du même ordre ; par contre les comptages avec cible d'or sont relativement plus faibles dans le cas de l'expérience avec rayonnement de freinage.

Remarque :

Dans la normalisation, on a tenu compte également d'une légère dérive de la voie "NaI haut" en introduisant un terme correctif de la



Figure 2.30 expérience avec photons monochromatiques, spectres corrigés

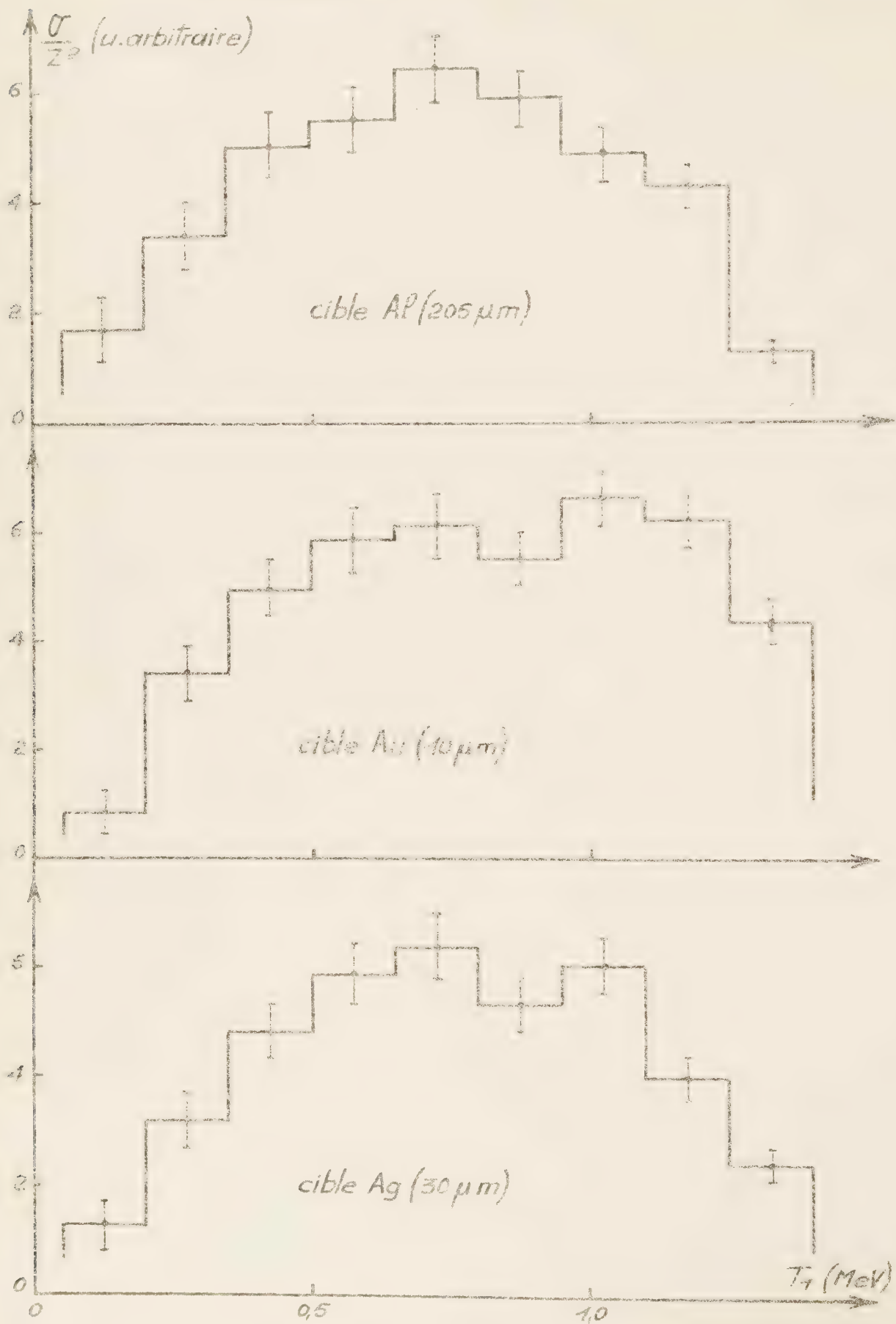
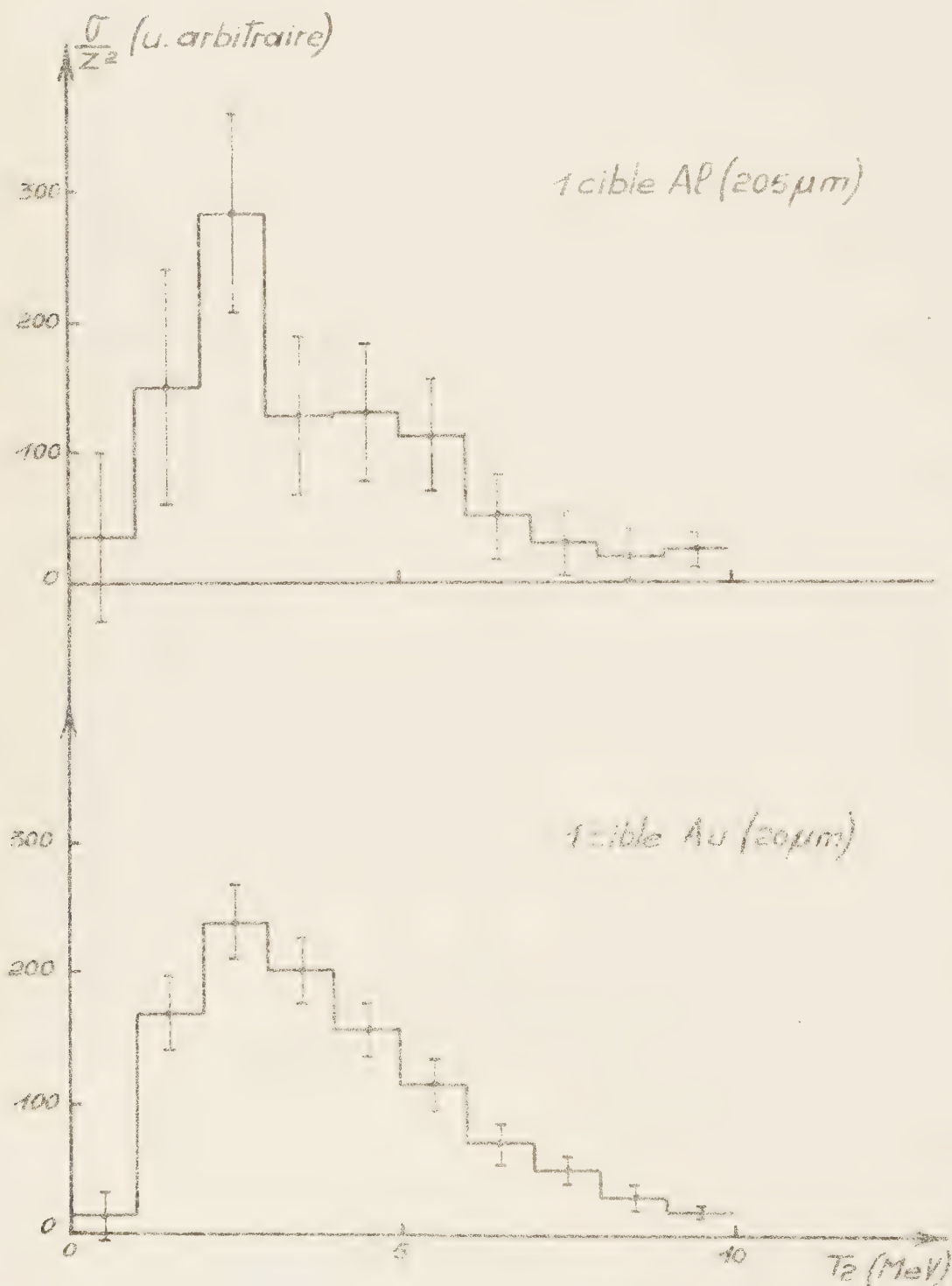


Figure 2.37: expérience avec rayonnement de freinage ;
spectres normalisés ; $T_1 = (0,86 \pm 0,5) \text{ MeV}$



forme : largeur de la fenêtre (mesurée en canaux) / position du pic de 660 keV (n° du canal). Ce coefficient est compris entre 0,8 et 1,1.

6. Résultats expérimentaux corrigés.

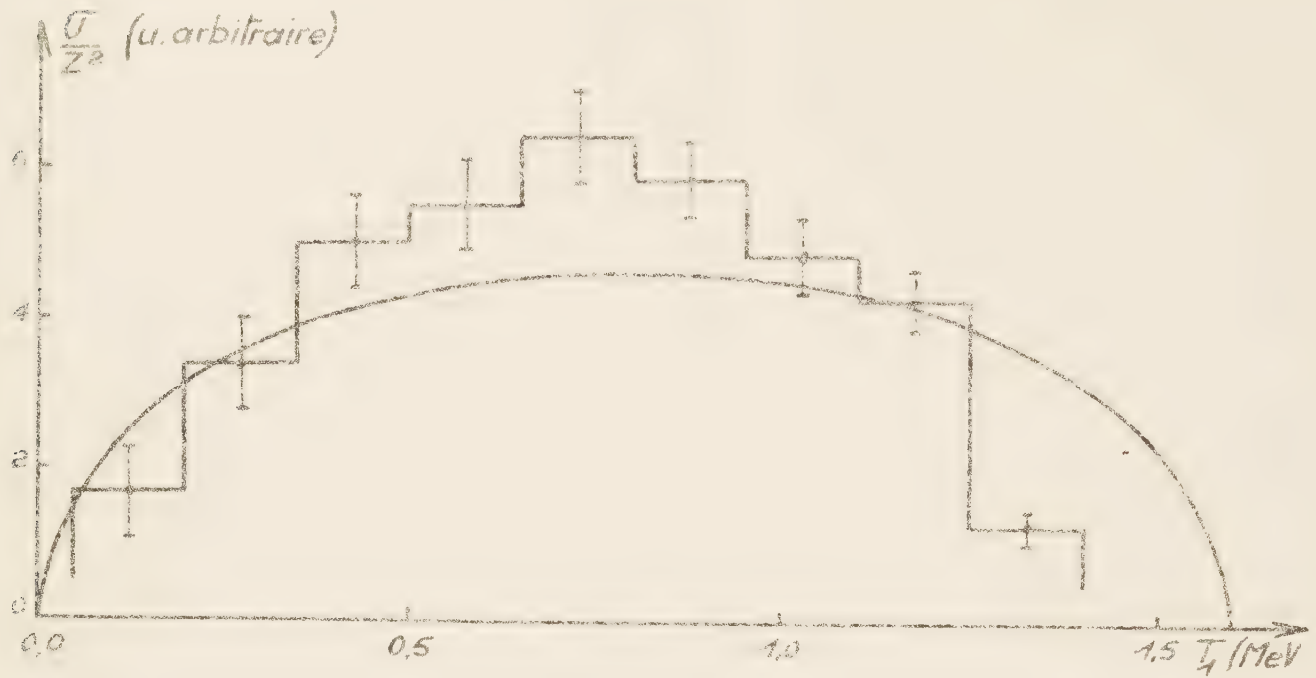
Nous avons déjà donné sur la figure 2.33 les spectres obtenus, dans la première expérience (photons de 2,62 MeV) avec une cible d'aluminium de 205 μm , une cible d'or de 10 μm et une cible d'or de 20 μm , les intervalles d'énergie Δ étant de 200 keV. La figure 2.36 montre, pour $\Delta = 150$ keV, les spectres dans les 3 cas : une cible d'aluminium de 205 μm , une cible d'or de 10 μm et une cible d'argent de 30 μm .

Les spectres obtenus au cours de l'expérience avec rayonnement de freinage se trouvent sur la figure 2.35 pour les valeurs $T_1 = (1,36 \pm 1,0)$ MeV et $T_1 = (1,86 \pm 0,5)$ MeV. On obtient par différence les spectres relatifs à $T_1 = (0,86 \pm 0,5)$ MeV (figure 2.37). Il resterait à faire sur ces spectres les corrections de résolution et d'autoabsorption, mais nous avons montré que ces corrections étaient négligeables. Nous verrons d'ailleurs que les erreurs statistiques sont beaucoup plus importantes dans le cas de l'expérience "RF" à cause des nombreuses soustractions qui sont intervenues pour obtenir les spectres définitifs ; les corrections sont donc inutiles dans ce cas.

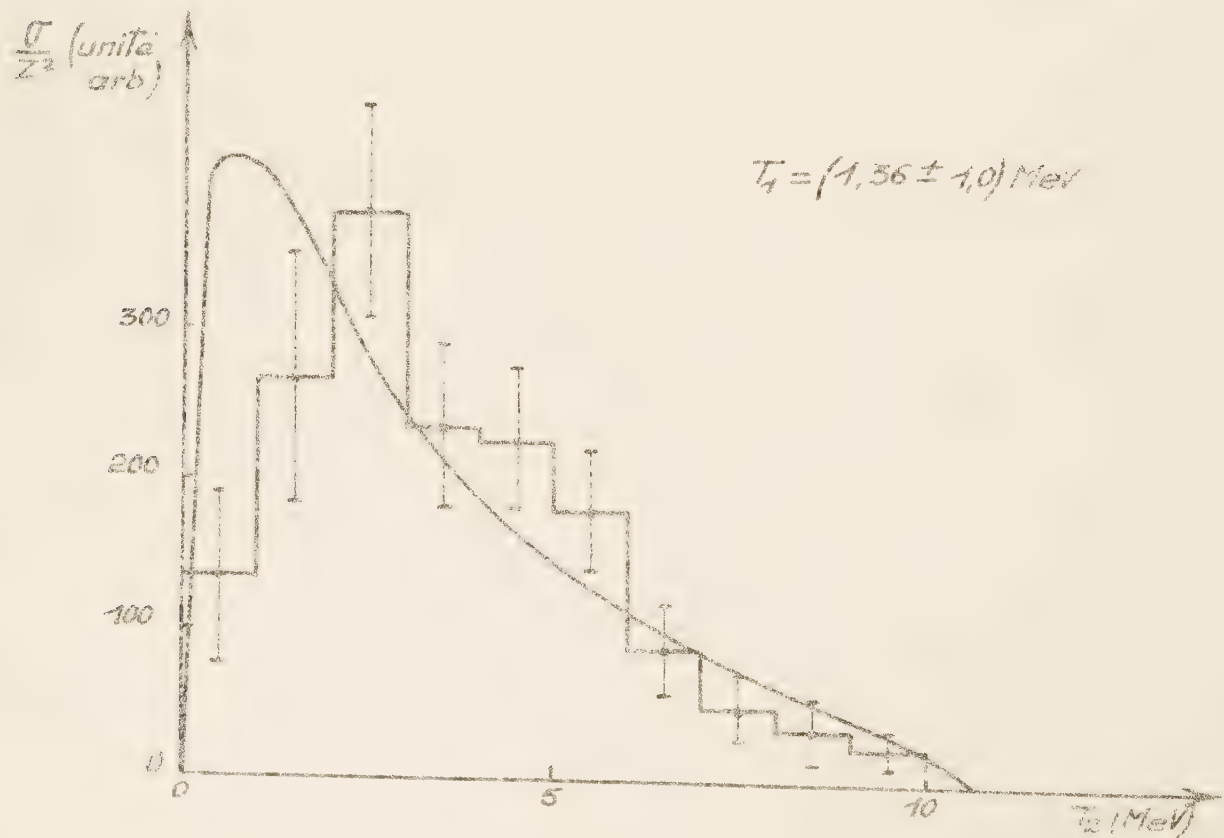
CONCLUSION

Figure 3.1: 1 cible Al (205 μ m); ——— courbes théoriques.

3.1.a: expérience avec photons γ 2,62 MeV.



3.1.b: expérience avec "RF".



Nous avons représenté précédemment des spectres expérimentaux où la quantité en ordonnées est proportionnelle à σ/Z^2 . Il est très difficile de remonter à la valeur absolue de la section efficace car on doit calculer exactement : le flux incident de rayons γ arrivant sur les cibles, l'efficacité de collection et de détection des électrons par les scintillateurs, l'efficacité de détection des rayons γ d'annihilation. Le deuxième point est d'ailleurs le plus délicat car l'aimant utilisé a été choisi uniquement pour jouer le rôle de séparateur des charges positives et négatives. Nous nous limitons donc à des mesures relatives qui nous permettront d'atteindre le but poursuivi : évaluer l'importance de la correction Coulombienne, prépondérante dans le domaine d'énergie où nous nous trouvons (cf. p. 13, 1^{re} partie), les résultats des calculs de corrections radiatives étant par ailleurs indépendants de Z (cf. p. 14, 1^{re} partie).

1. Efficacité relative de détection des paires.

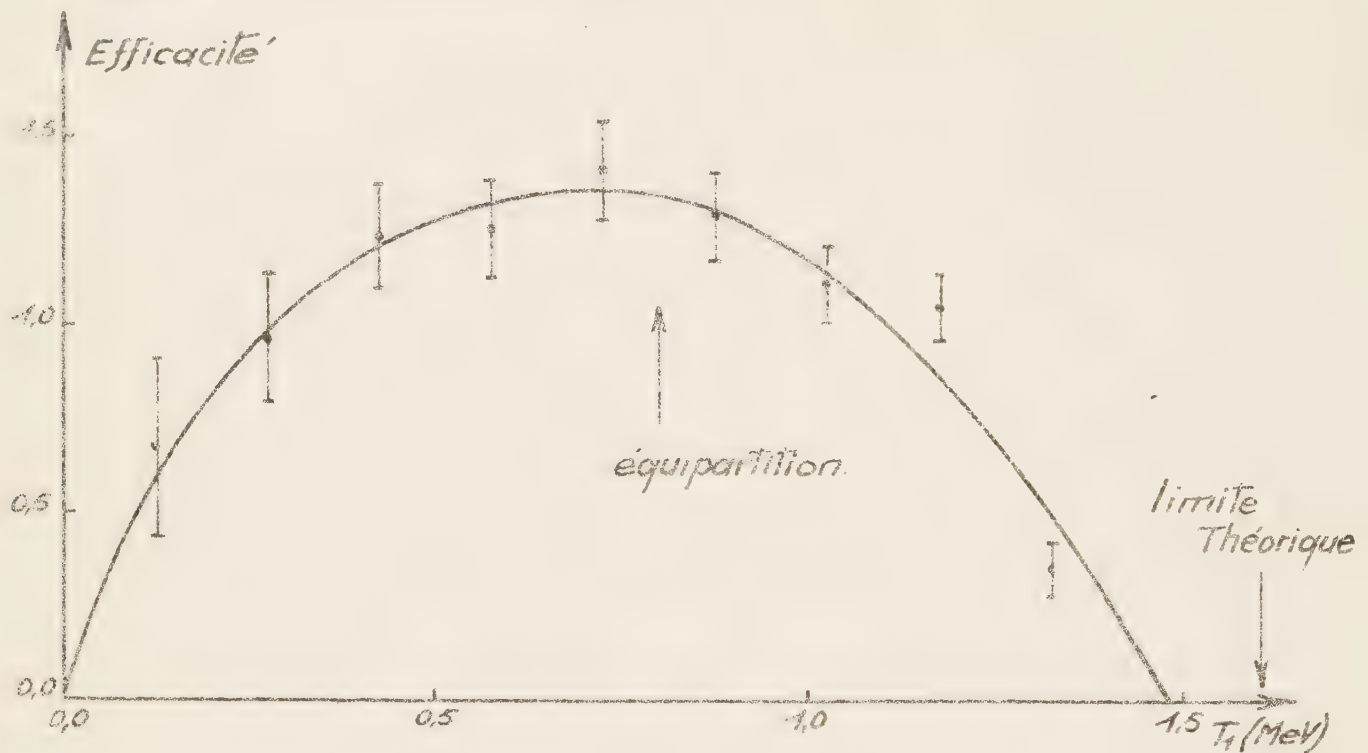
Application en spectrométrie γ .

La figure 3.1.a montre le spectre obtenu avec les photons monochromatiques de 2,62 MeV et une cible en aluminium de 205 μm , ainsi que la section efficace de Bethe et Heitler donnée par (1.97). La figure 3.1.b est relative à la même cible mais avec rayonnement de freinage ; les valeurs théoriques sont égales aux produits de la section efficace de Bethe et Heitler (figure 1.11) par le nombre de photons de rayonnement de freinage dans l'intervalle d'énergie $k, k + \Delta k$ (figure 2.25). Les surfaces des spectres théoriques et expérimentaux sont normalisées.

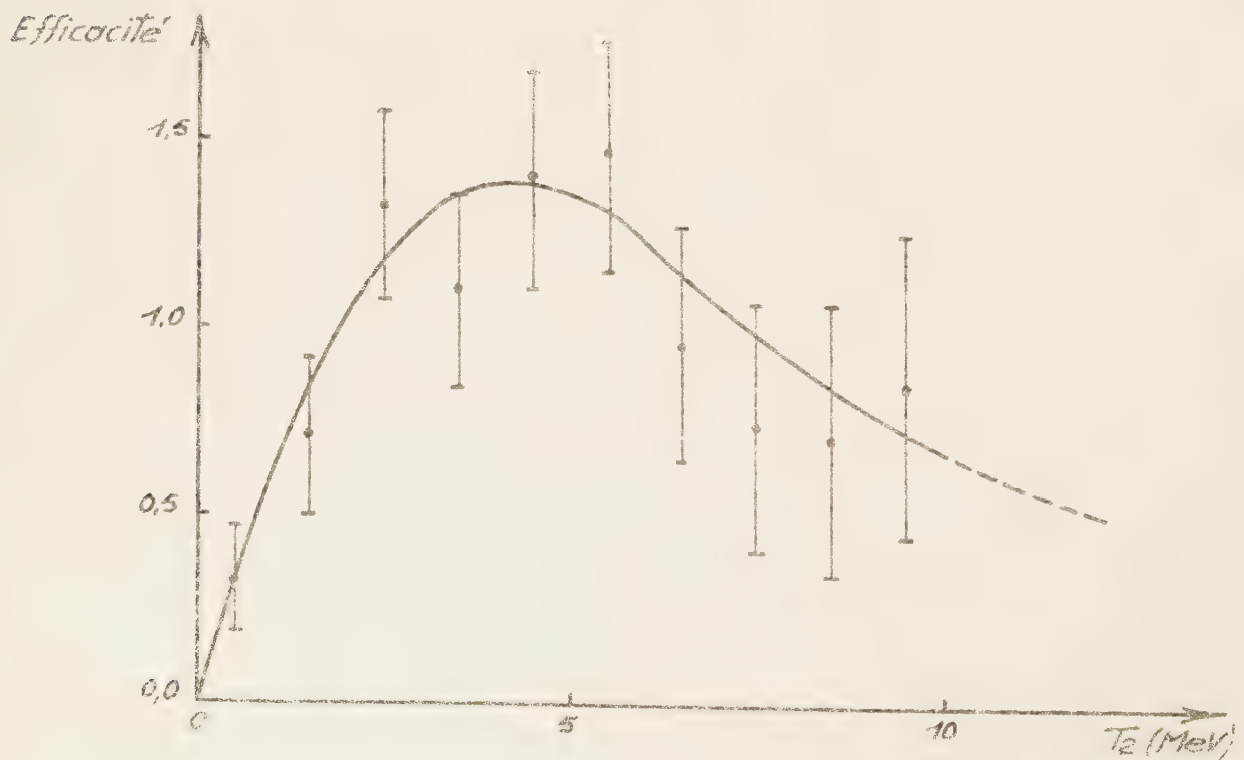
Il existe une différence nette entre courbes théoriques et expérimentales, cette différence provenant surtout de la perte d'électrons de basse énergie, perte due aux seuils de l'électronique, à l'absorption

Figure 3.2 : efficacité relative de détection.

3.2.a : expérience avec photons de 2.62 MeV.



3.2.b : expérience avec "RF."



des électrons dans la cible, l'air et les fenêtres d'entrée des scintillateurs, à la rétrodiffusion sur les scintillateurs (plus importante à basse énergie), aux rayons de courbure trop petits dans le champ magnétique.

Pour l'expérience avec rayons γ monochromatiques, on observe un excès du spectre expérimental au voisinage de l'équipartition ($T_1=0,8\text{MeV}$) et un défaut vers les extrémités, défaut beaucoup plus marqué pour les grandes valeurs de T_1 . Les paires sont mieux détectées au voisinage de l'équipartition ; les négatons de basse énergie sont beaucoup moins bien détectés par la "voie SPF" que les positons de basse énergie du côté "anthracène". On a porté sur la figure 3.2.a l'efficacité de détection $\chi(T_1)$ définie comme le rapport entre les valeurs expérimentales et théoriques des courbes de la figure 3.1.a, à énergie T_1 donnée. Cette courbe d'efficacité met en évidence les conclusions que nous venons de donner.

Dans le cas de l'expérience avec rayonnement de freinage, la voie anthracène n'influe pas sur l'efficacité de détection $\chi(T_2)$ en fonction de T_2 . Les figures 3.1.b et 3.2.b montrent que l'efficacité de détection est maximale aux environs de 5 MeV. Elle s'annule pour $T_2 \rightarrow 0$. Elle diminue et tend vers zéro pour $T_2 \rightarrow \infty$ car les électrons de haute énergie ne sont pas suffisamment courbés par le champ magnétique pour atteindre le scintillateur plastique ; de plus, leur angle d'incidence sur le scintillateur croît et leur rétrodiffusion augmente.

La comparaison des valeurs de σ/Z^2 théoriques et expérimentales peut être conduite de la façon suivante. Admettant l'approximation de Born pour $Z = 13$, nous calculons à l'aide des spectres avec cible en aluminium : un coefficient C de normalisation des surfaces des courbes théoriques et expérimentales, l'efficacité relative de détection $\chi(T_1)$ ou $\chi(T_2)$. Avec ces 2 quantités, on obtient la valeur théorique $(\sigma/Z^2)_{th}$. $C.\chi$ comparable à la valeur expérimentale $(\sigma/Z^2)_{exp}$ pour $Z > 13$.

En fait nous n'utilisons pas cette méthode. Il est beaucoup plus simple d'introduire les grandeurs :

$$Y = \frac{\frac{\sigma}{Z^2}(Z=13) - \frac{\sigma}{Z^2}(Z > 13)}{\frac{\sigma}{Z^2}(Z=13) + \frac{\sigma}{Z^2}(Z > 13)} \quad (3.1)$$

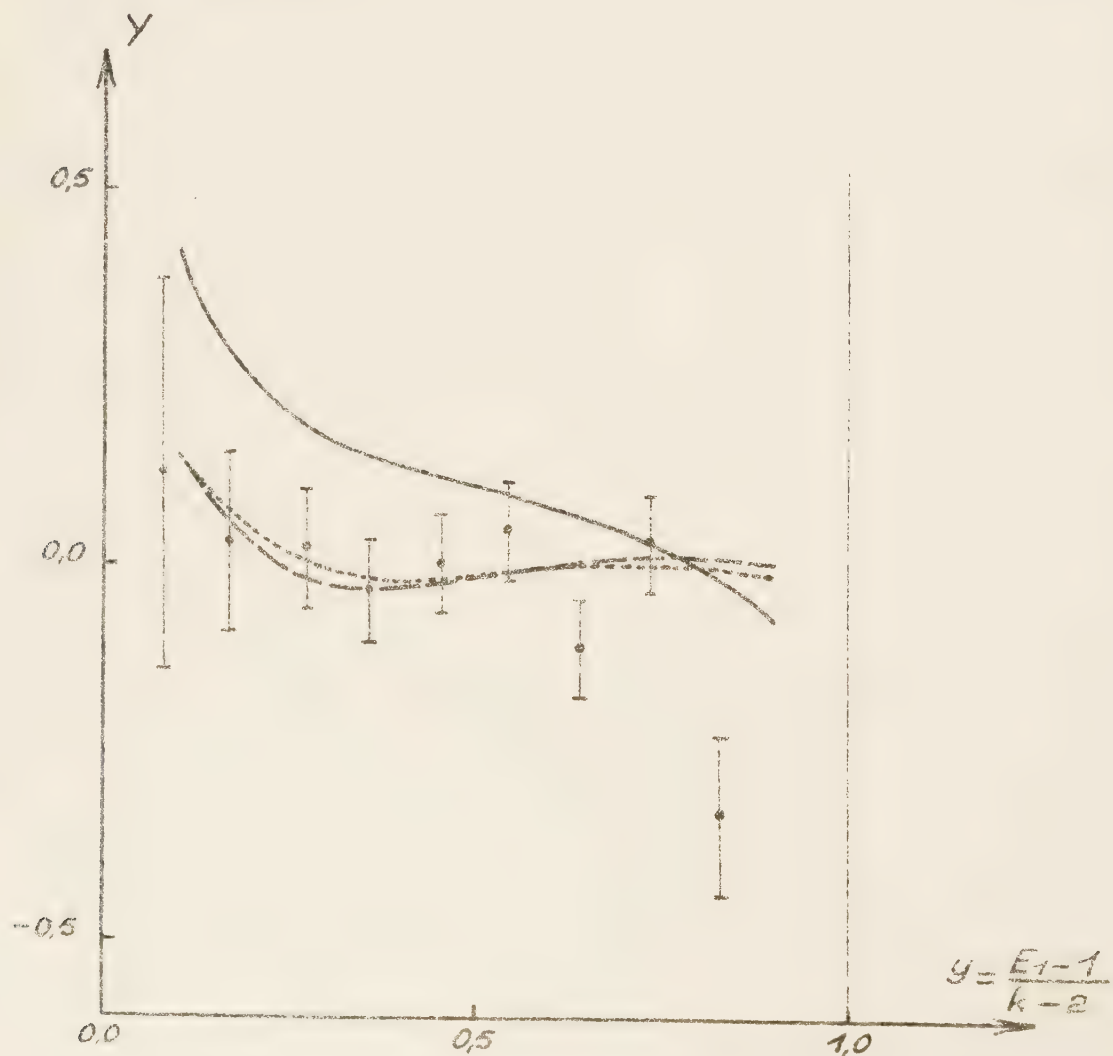
Figure 3.3 : comparaison des résultats théoriques et expérimentaux ; $k=5,2$.

Théorie : ——— $Y_3 = \frac{\sigma_{BH} - \sigma_{BM}}{\sigma_{BH} + \sigma_{BM}}$; - - - - - $Y_6 = \frac{\sigma_{BH} - \sigma}{\sigma_{BH} + \sigma}$;

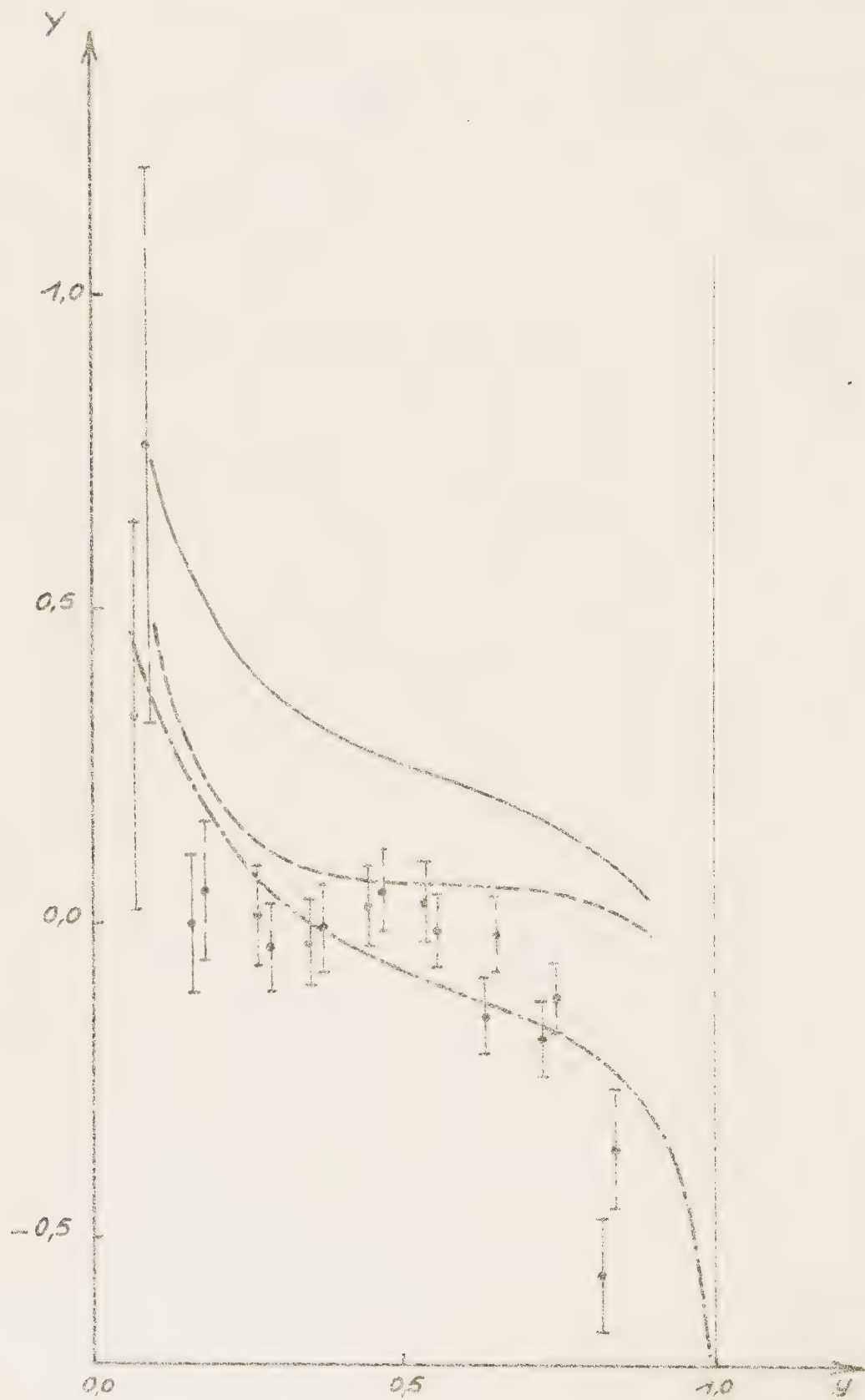
- - - - - $Y_7 = \frac{\frac{\sigma}{Z^2}(Z=13) - \frac{\sigma}{Z^2}(Z=47)}{\frac{\sigma}{Z^2}(Z=13) + \frac{\sigma}{Z^2}(Z=47)}$; ——— $Y_8 = \frac{\sigma_{BH} - \sigma_{JH}}{\sigma_{BH} + \sigma_{JH}}$

Expérience : $\bullet$ 1 cible Ag (30 μm) ou 1 cible Au (10 μm) $\left\{ \begin{array}{l} \text{1 cible Au (20 } \mu m) \\ \text{1 cible Au (30 } \mu m) \end{array} \right.$

3.3.a : 1 cible Ag (30 μm).



3.3.b: cible en or



où C et χ s'éliminent automatiquement. Cette quantité Y sera comparée directement aux grandeurs correspondantes Y_3 ou Y_6 introduites dans la 1^{re} partie. Le calcul de Y s'impose d'ailleurs dans le cas de l'expérience avec rayonnement de freinage car Y est indépendant du spectre de photons dont la détermination augmenterait encore l'incertitude sur les résultats à confronter.

Pour une utilisation du dispositif expérimental comme spectromètre γ , la courbe d'efficacité relative de la figure 3.2.b présente néanmoins de l'intérêt. Jointe à des courbes d'efficacité théorique telles que celles de la figure 1.41, elle peut permettre inversement de remonter d'un spectre expérimental $N(T_2) \cdot \Delta T_2$ au spectre $N(k) \cdot \Delta k$ des rayons γ qui atteignent le détecteur (exemple : détermination du spectre énergétique d'un faisceau de rayonnement de freinage produit dans une cible épaisse de matériau lourd).

2. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.

a) Expérience avec rayons γ monochromatiques de 2,62 MeV.

Nous avons porté les résultats relatifs à l'expérience avec photons de 2,62 MeV sur la figure 3.3.

On voit que dans le cas de l'argent (figure 3.3.a), il y a bon accord entre les résultats expérimentaux Y définis par (3.1) et la courbe théorique Y_6 , à l'exception du dernier point du côté $y = 1$ pour lequel l'énergie cinétique du positon est très supérieure à celle du négaton. On peut donc admettre que le calcul du terme correctif à la section efficace de Bethe-Maximon est valable jusqu'aux valeurs de Z intermédiaires ($Z \leq 47$). La distorsion Coulombienne (par rapport à l'Approximation de Born) est d'ailleurs négligeable sur une grande partie du spectre : $0,1 \leq y \leq 0,9$. Sur la figure 3.3.a se trouve également une courbe théorique :

$$Y_7 = \frac{\frac{\sigma}{Z^2}(Z=13) - \frac{\sigma}{Z^2}(Z=47)}{\frac{\sigma}{Z^2}(Z=13) + \frac{\sigma}{Z^2}(Z=47)}$$

qui est très peu différente de Y_6 car : $\frac{\sigma}{Z^2}(Z=13) \sim \frac{\sigma_{BH}}{Z^2}$

Dans le cas de l'or (figure 3.3.b), on remarque un bon accord entre les deux séries de résultats (1 cible de 10 μm et 1 cible de 20 μm), mais les points expérimentaux s'éloignent assez sensiblement de Y_6 , et d'autant plus que $y \rightarrow 1$ (grande divergence énergétique avec $T_1 \gg T_2$). L'introduction du terme correctif approche nettement le calcul théorique de l'expérience, tout en étant encore insuffisant à grande divergence énergétique ; nous avons signalé dans la théorie que la correction telle que nous l'avons faite était valable jusqu'à l'ordre $\frac{Z}{137}$ (en valeur relative), mais incomplète jusqu'à l'ordre $(\frac{Z}{137})^2$; c'est ce qui explique le désaccord actuel entre théorie et expérience.

Sur le graphique 3.3.b se trouve également la courbe théorique $Y_8 = (\sigma_{BH} - \sigma_{JH}) / (\sigma_{BH} + \sigma_{JH})$, où σ_{JH} est la section efficace calculée par Jaeger-Hulme par la méthode de décomposition en harmoniques sphériques⁽²²⁾. On a cette fois un bon accord entre les points expérimentaux et Y_8 , d'autant plus que σ_{JH} est calculé pour $Z = 82$, et que le calcul est approché car les auteurs se limitent aux transitions à partir de l'état fondamental $l' = m' = 0$ (cf. p. 16, 1^e partie). Cet accord de nos résultats avec les calculs de Jaeger et Hulme constitue de plus une preuve de la valeur de nos mesures et de la validité de la méthode expérimentale utilisée.

On trouve d'autres déterminations des spectres de positons dans les publications :

- (61) $k = 4,4$; $Z = 29, 47, 50, 78, 82$;
- (62) $k = 5,2$; $Z = 82$;
- (5) Rayonnement de freinage : $k = 2-6, 6-12$; $Z = 7$;
- (24) Rayonnement de freinage : $k = 0-9, 9-14, 14-19, 19-25, 25-37$; $Z=7$;
- (63) Rayonnement de freinage : $k = 10-20, 20-30, \dots 80-90$; émulsion G-5;
- (7) Collisions π^+p : $k = 20-200, 200-1000, 1000-2000, 2000-10000$;
chambre à bulle à propane.

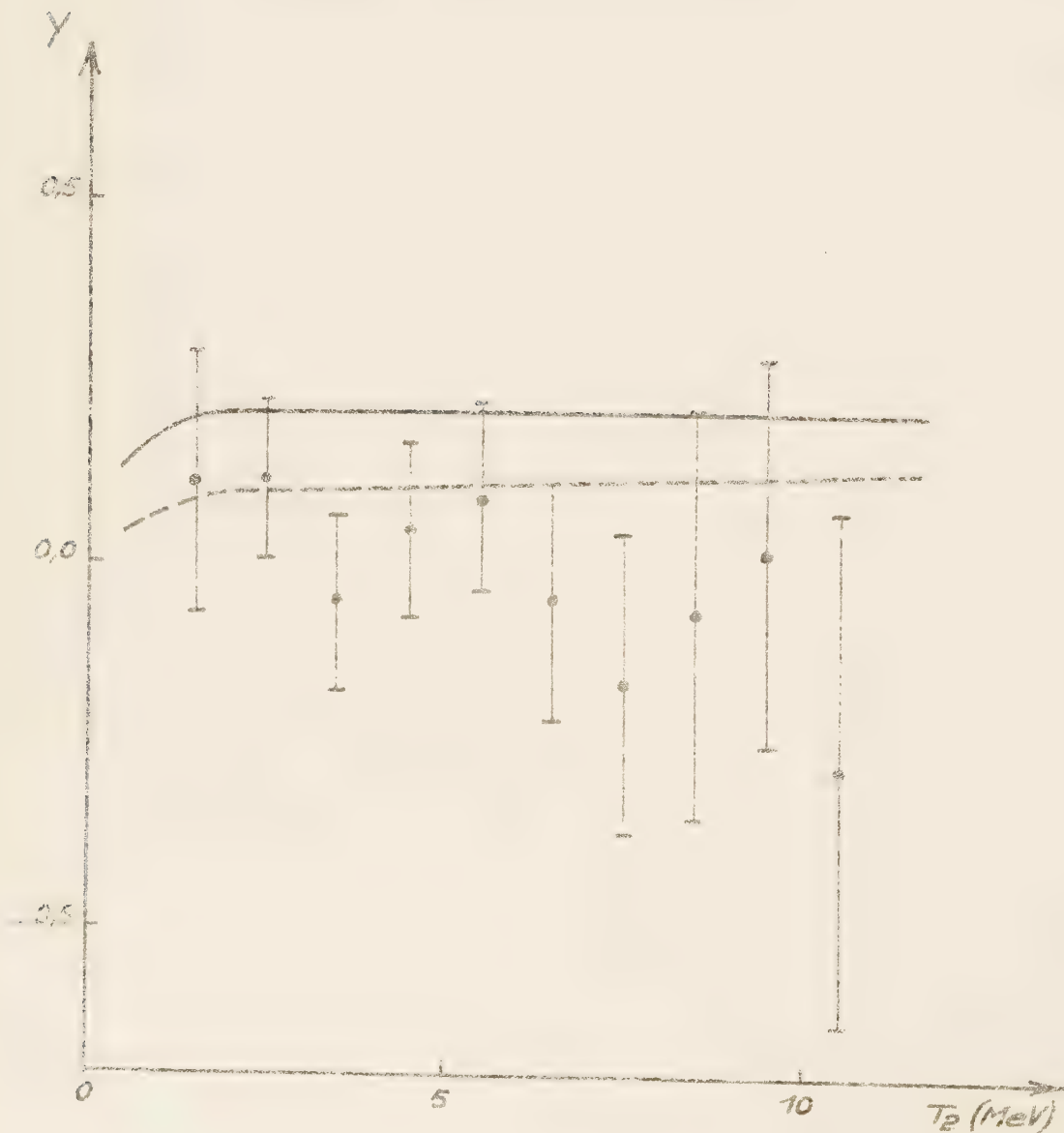
Ces résultats souffrent en général d'une statistique faible : dans⁽⁶¹⁾ par exemple, les nombres de paires sont de 100 pour $Z = 82$, 85 pour $Z = 78$, 72 pour $Z = 50$, 63 pour $Z = 47$ et 50 pour $Z = 29$. Les résultats de Alichanow, Alichanian et Kosodaev⁽⁶²⁾ sont qualitativement en accord avec la courbe théorique de Jaeger-Hulme⁽²²⁾. Nous n'avons pas pu les comparer exactement aux nôtres car la normalisation est imprécise.

Figure 3.4 : comparaison des résultats théoriques et expérimentaux; expérience avec "RF"; $Z=79$.

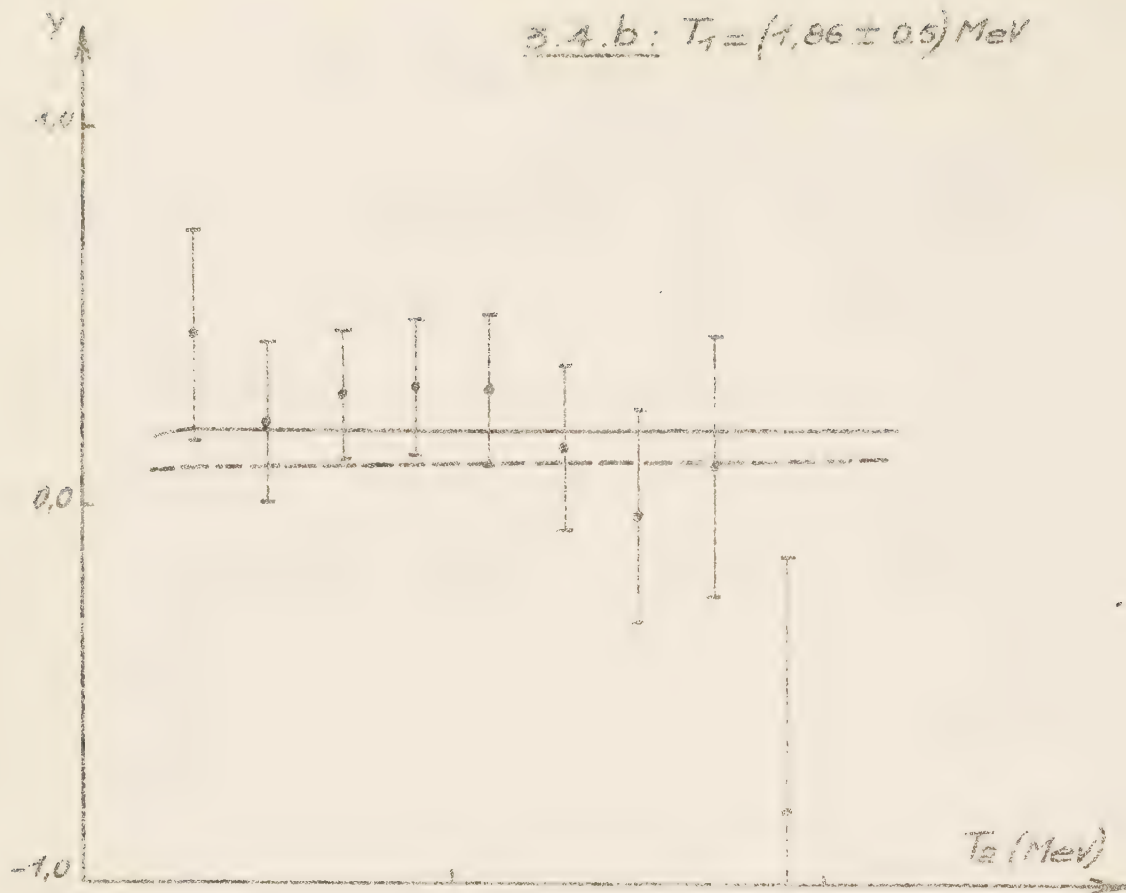
Théorie: $\text{——— } Y_3 = \frac{\sigma_{BH} - \sigma_{BM}}{\sigma_{BH} + \sigma_{BM}} \quad ; \quad \text{----- } Y_6 = \frac{\sigma_{BH} - \sigma}{\sigma_{BH} + \sigma}$

Expérience: 

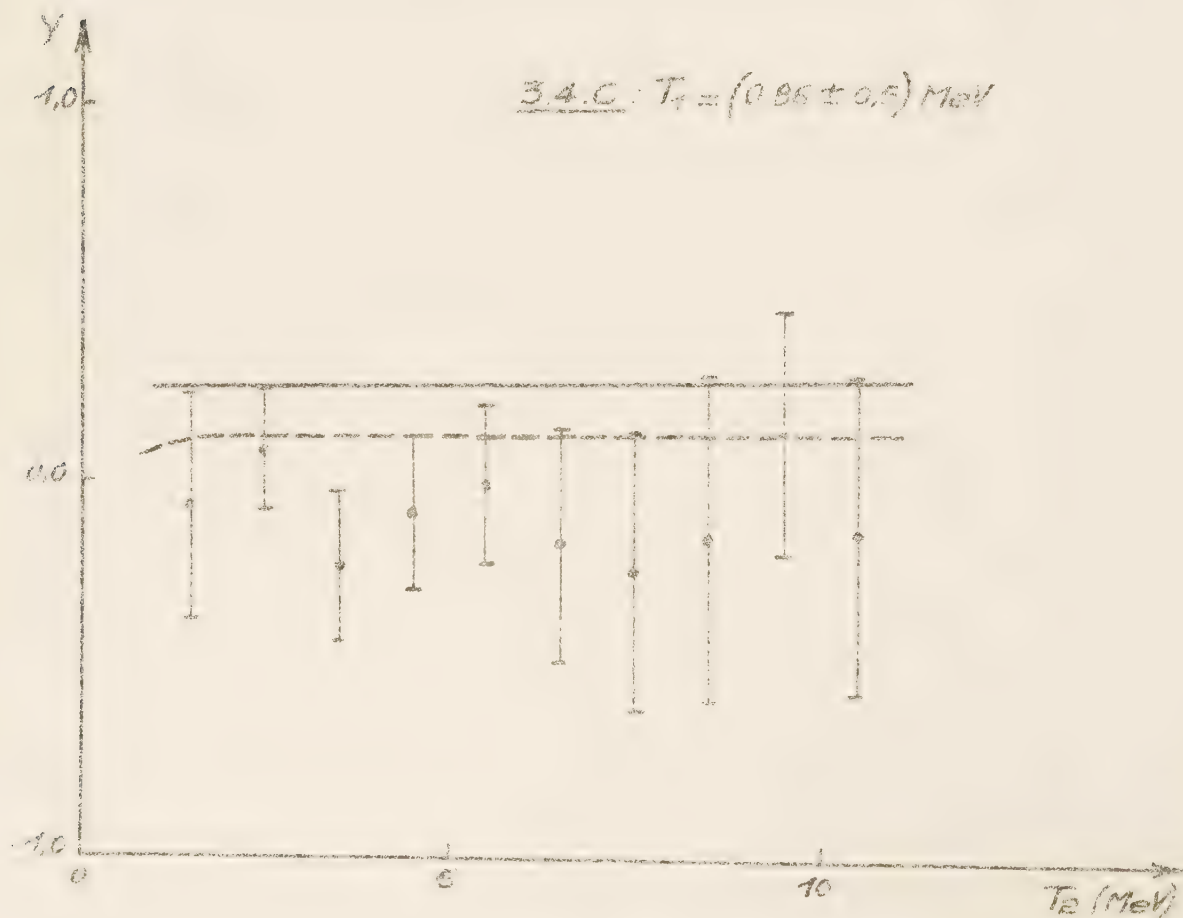
3.4.a : $T_1 = (1,35 \pm 1,0) \text{ MeV}$



3.4.b: $T_1 = (1.86 \pm 0.5) \text{ MeV}$



3.4.c: $T_1 = (0.96 \pm 0.5) \text{ MeV}$



b) Expérience avec rayonnement de freinage.

Les résultats expérimentaux ainsi que les courbes théoriques Y_3 et Y_6 se trouvent sur la figure 3.4.

Les résultats expérimentaux sont entachés d'erreurs assez grandes, surtout dans les deux cas $T_1 = 1,86 \pm 0,5$ MeV et $T_1 = 0,86 \pm 0,5$ MeV, ce qui nous a d'ailleurs conduit à négliger les corrections de résolution et d'autoabsorption dans les cibles. Ces erreurs sont dues principalement à la mesure avec cible d'aluminium (voir figures 2.35 et 2.37). Les comptages avec cible d'or étant de 3 ou 4 heures, il aurait fallu avec la cible d'aluminium des comptages de 20 heures pour obtenir la même statistique, alors que nous nous sommes limités à 5 ou 7 heures.

Toutefois, les résultats expérimentaux sont en assez bon accord avec les courbes calculées, la correction σ_C tendant à rapprocher, en général, la théorie de l'expérience. On peut remarquer que les valeurs expérimentales sont proches de la valeur donnée par l'Approximation de Born. Il semble que, au moins dans les 2 cas $T_1 = 1,86 \pm 0,5$ MeV et $T_1 = 1,36 \pm 1,0$ MeV, σ tend à devenir supérieur à σ_{BH} lorsque la divergence énergétique augmente : Y décroît et devient négatif lorsque T_2 augmente.

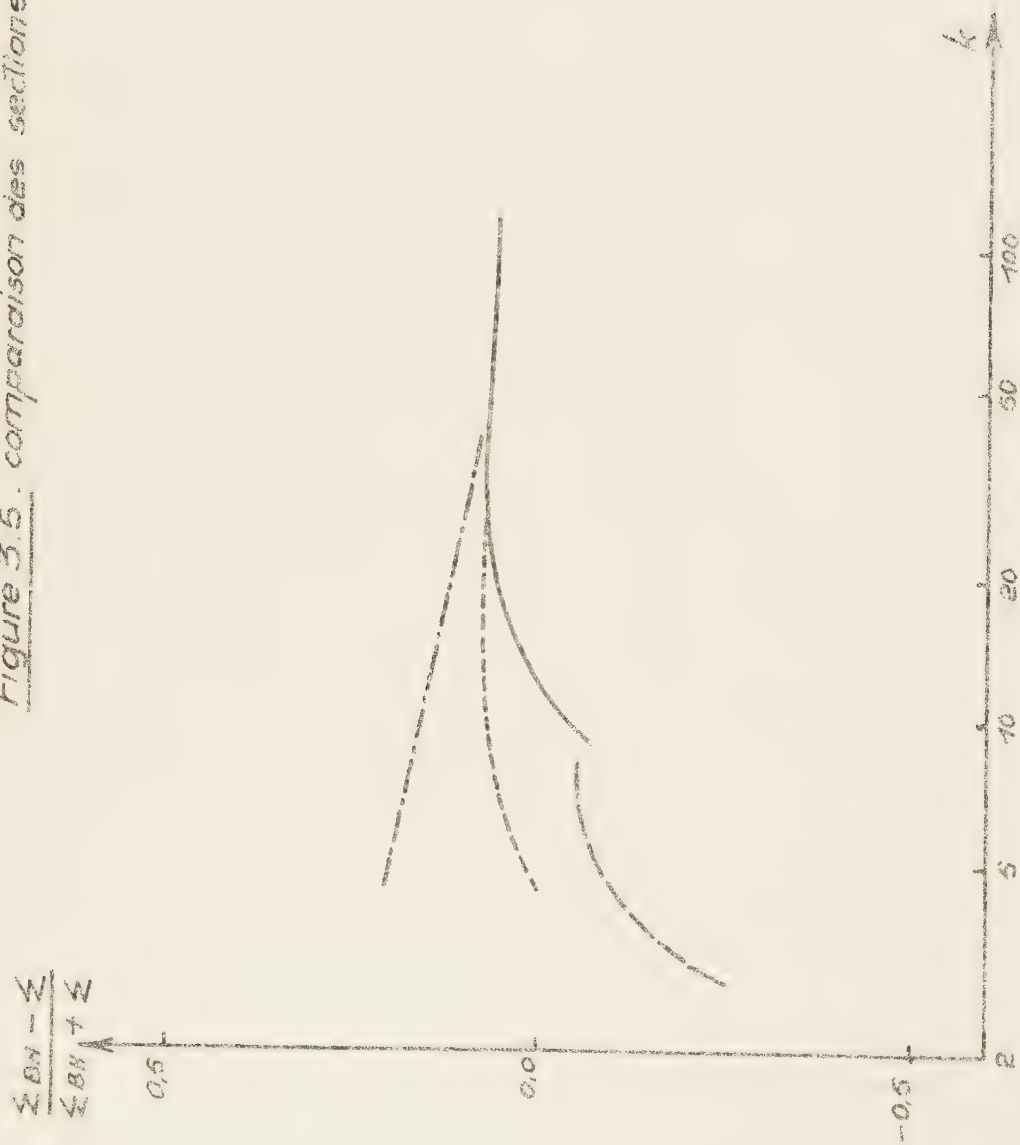
Il aurait été intéressant de faire une expérience avec une cible en argent pour voir si le calcul que nous avons fait est effectivement valable pour les valeurs de Z intermédiaires, comme nous le pensons.

Rappelons que Plimpton et Hammer⁽⁹⁾ ont trouvé des différences énormes entre expérience et théorie (un facteur de 10 à 15) dans le cas $Z = 79$, $\theta_1 = 90^\circ$, $T_1 \leq 1,5$ MeV, faisceau de rayonnement de freinage de 40 MeV. Cette incompatibilité n'apparaît pas dans nos résultats. Les conditions expérimentales sont toutefois assez différentes puisque Plimpton et Hammer étudient un cas de production de paire à grand angle.

b) Section efficace totale.

Nous notons Σ la section efficace totale (intégrée sur E_1). Les études théoriques et expérimentales que l'on rencontre ont généralement pour but de mettre en évidence la variation de Σ en fonction des deux seuls paramètres k et Z qui déterminent la production de paire dans le

Figure 3.5. comparaison des sections efficaces totales.



Dans le cas de l'Approximation de Born, le problème est résolu. Σ varie comme Z^2 si l'Effet d'écran est négligeable. La variation en fonction de k est plus difficile à mettre en évidence car la section efficace (1.35) ne s'intègre que numériquement, mais il existe des courbes⁽²⁹⁾ ou des formules approchées⁽⁶⁴⁾. Dans le cas ultrarelativiste, si l'effet d'écran est soit négligeable soit complet, on a respectivement⁽²⁹⁾ :

$$\Sigma_{BH} = Z^2 e^6 \cdot \left(\frac{28}{9} \cdot \text{Log } 2k - \frac{218}{27} \right) \quad (3.2)$$

$$\Sigma_{BH} = Z^2 e^6 \left[\frac{28}{9} \cdot \text{Log } (183 \cdot Z^{-1/3}) - \frac{2}{27} \right] \quad (3.3)$$

Lorsque l'approximation de Born n'est pas valable, le problème est également résolu près du seuil et dans la limite ultrarelativiste. Près du seuil, k inférieur à quelques MeV, on a⁽⁶⁾ :

$$\Sigma = \Sigma_{BH} \cdot \left(1 + \frac{a \cdot Z^2}{k-2} \right) \quad \text{avec } a = 8,4 \cdot 10^{-5} \quad (3.4)$$

Dans le cas ultrarelativiste⁽³⁶⁾ :

$$\Sigma = \Sigma_{BH} - \frac{28}{9} \cdot Z^2 e^6 \cdot f(Z) \quad (3.5)$$

Σ_{BH} étant donné par (3.2) ou (3.3) et $f(Z)$ par (1.38 bis). Il reste le domaine d'énergie intermédiaire ($5 \lesssim k \lesssim 50$) où Davies, Bethe et Maximon⁽³⁶⁾ proposent la relation semi-empirique :

$$\Sigma = \Sigma_{BH} - 4,0 + \frac{46}{k} \quad (3.6)$$

valable pour $k \gtrsim 10$ (5 MeV) et $Z = 82$. Dans (3.6) les sections efficaces sont en barn, k en unité mc^2 .

Nous comparons d'abord nos calculs aux résultats établis. Nous avons porté sur la figure 3.5 la courbe :

$$Y_9 = \frac{\Sigma_{BH} - \Sigma}{\Sigma_{BH} + \Sigma}$$

en fonction de k pour $Z = 82$, utilisant pour Σ les formules (3.4) et (3.6). A partir des calculs de la première partie, chapitre IV, nous avons obtenus la section efficace totale Σ par intégration numérique de $\sigma_{BM} \cdot dE_1$ et de $(\sigma_{BM} + \sigma_C) \cdot dE_1$. Les courbes correspondantes sont également représentées sur la figure 3.5. On observe que l'introduction du

terme correctif σ_C donne des valeurs nettement plus proches de Y_g que les valeurs déduites de σ_{BM} . La courbe corrigée est pratiquement en accord avec Y_g pour k supérieur à 20 (10 MeV). Il faut d'ailleurs remarquer que les deux courbes Y_g déduites de (3.4) et (3.6) ne se raccordent pas exactement.

Nous examinons enfin la variation en fonction de Z pour $k = 5,2$. D'après (3.4), on a :

$$(\Sigma - \Sigma_{BH})/\Sigma_{BH} = 2,6 \cdot 10^{-5} \cdot Z^2$$

soit 0,162 pour $Z = 79$ et 0,057 pour $Z = 47$. A partir des spectres expérimentaux avec 1 cible d'or de 10 μm et 1 cible d'argent de 30 μm , on obtient les 2 valeurs : $(\Sigma - \Sigma_{BH})/\Sigma_{BH} = 0,171$ et 0,053 respectivement, valeurs en très bon accord avec la formule de Huck, ce qui constitue une preuve supplémentaire importante de la validité de notre expérience.

4. En résumé

a) Les calculs théoriques que nous avons conduits permettent d'obtenir la correction de Coulomb jusqu'aux valeurs de Z intermédiaires ($Z \lesssim 47$), et pour k aussi faible que 5 ($k \gtrsim 5$). Pour ces valeurs de Z , nos calculs permettent de faire la liaison des énergies ultrarelativistes aux énergies près du seuil, où la section efficace est connue, soit par les calculs de Bethe et Maximon ultrarelativistes, soit par les calculs de Jaeger et Hulme basés sur la décomposition des solutions de l'équation de Dirac sur les harmoniques sphériques.

b) Pour Z élevé, il semble extrêmement difficile de faire un calcul complet de la correction de Coulomb dans le même domaine ($5 \lesssim k \lesssim 50$). Néanmoins, nos calculs permettent d'obtenir la section efficace totale de façon correcte jusqu'à des énergies de photons voisines de 10 MeV ($k \gtrsim 20$).

c) Dans le cas des noyaux lourds et des énergies de photons faibles se pose le problème de la validité de la méthode utilisée. Nous avons en effet admis implicitement la convergence du développement de Born dans le domaine des énergies intermédiaires. Or, il est démontré que cette convergence n'existe plus quand l'énergie de l'un des électrons est trop faible, surtout lorsque Z devient élevé. On peut donc prévoir que :

- les résultats sont moins bons lorsque k diminue et Z augmente ;

- pour k déterminé, la plage de validité en fonction de y (considéré comme paramètre de divergence énergétique) devient plus étroite lorsque Z croît.

Nos résultats expérimentaux confirment ces prévisions. L'examen des figures 3.3 et 3.4 permet de préciser les domaines de validité. Pour $Z = 47$ et $k = 5,2$, la section efficace théorique $\sigma_{BM} + \sigma_C$ est en accord avec l'expérience si y répond à la condition suivante :

$$0,1 \lesssim y \lesssim 0,8$$

Tandis que pour une même énergie du photon, nous trouvons que pour $Z = 79$, le domaine de validité se réduit à :

$$0,3 \lesssim y \lesssim 0,6$$

Toutefois, la figure 3.4.a montre que lorsque k augmente ($Z = 79$), la validité des calculs reste acceptable pour des valeurs telles que :

$$y \simeq 0,1 \quad ; \quad k \simeq 20$$

Pour des photons de faible énergie, on a donc intérêt à utiliser la méthode de Jaeger et Hulme.

d) On sait que la correction Coulombienne sur la section efficace totale devient minimale dans le domaine d'énergie que nous étudions, cela étant dû au fait que la correction, négative à haute énergie et positive près du seuil, change de signe aux environs de 5 ou 6 MeV. Nos résultats théoriques et expérimentaux montrent de plus que la distorsion Coulombienne ne modifie pratiquement pas le spectre d'énergie du positon, moins de quelques %, dans la mesure où on se limite à des divergences énergétiques pas trop grandes (par exemple : $0,1 \lesssim y \lesssim 0,9$ pour $Z \lesssim 47$).

e) Du fait que les formules utilisées sont compliquées et non intégrales analytiquement sur les angles θ_1 , θ_2 et ϕ , les calculs numériques que nous avons faits demandent un ordinateur^{puissant} pour être effectués de façon commode. Si on se dispense de tels calculs, on peut admettre que la section efficace $\sigma(E_1, k, Z).dE_1$ déduite de l'approximation de Born est pratiquement valable pour $5 \lesssim k \lesssim 20$. Dans le cas du rayonnement de freinage, phénomène inverse de la production de paire, il en est de même pour la section efficace $\sigma(E_0, k, Z).dk$ où E_0 est l'énergie de l'électron primaire.

f) Le spectromètre à paire à "cible externe" tel que nous l'avons décrit peut être utilisé dans le domaine d'énergie de 2 à 20 MeV. Il faut toutefois un flux de rayons γ intense (de l'ordre de 10^6 photons dans la cible pour obtenir un événement), une bonne collimation et un blindage suffisant. L'efficacité absolue paraît difficile à déterminer de façon précise par le calcul ; on doit se limiter à des mesures relatives.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) P.Y BERTIN, Thèse n° 64, Faculté des Sciences de l'Université de Clermont-Ferrand (1966)
- (2) J AUGERAT - J CASTOR - P.Y BERTIN, C.R. Acad. Sc. Paris, 262, 835 (1966)
- (3) J CASTOR - J AUGERAT - J BERTHOT, C.R. Acad. Sc. Paris, 262, 646 (1966)
- (4) J AUGERAT, Thèse 3e cycle n° 92, Faculté des Sciences de l'Université de Clermont-Ferrand (1967)
- (5) T HOLTWIJK, Thèse, Université de Groningen (1960)
- (6) J. HUCK, Thèse n° 336, Faculté des Sciences de l'Université de Lyon (1964)
- (7) J BEM - V.G GRISHIN - E.P KISTENEV, JETP Letters, 4, 24 (1966)
- (8) D BENAKSAS - R MORRISON, Phy. Rev., 160, 1245 (1967)
- (9) J.D PLIMPTON - C.L. HAMMER, Nuovo Cimento, 30, 1349 (1963)
- (10) D.S MOROÏ - C.L HAMMER, Nuovo Cimento, 30, 1396 (1963)
- (11,12) R.B BLUMENTHAL - D.C EHN - W.L FAISSLER - P.M JOSEPH - L.J LANZEROTTI - F.M PIPKIN - D.G STAIRS, Phy. Rev. Lett., 14, 660 (1965) ;
Phy. Rev. 144, 1199 (1966)
- (13) R TALMAN, Bull. Am. Phy. Soc., 11, 380 (1966)
- (14) E FERRARI - P.G THURNAUER, UR-875-160 (1966)
- (15) E.L LOMON, Phy. Lett., 21, 555 (1966)
- (16) M.M MAY, Phy. Rev., 84, 265 (1951)
- (17) H ÜBERALL, Phy. Rev., 103, 1055 (1956)
- (18) H OLSEN - L.C MAXIMON, Phy. Rev., 114, 887 (1959)
- (19) L.C MAXIMON - H OLSEN, Phy. Rev., 126, 310 (1962)
- (20) F.R ARUTYUNYAN - V.A TUMANYAN, Soviet Phy. Uspekhi, 83, 339 (1964)
- (21) H BETHE - W HEITLER, Proc. Roy. Soc, A146, 83 (1934)
- (22) J.C JAEGER - H.R HULME, Proc. Roy. Soc., A153, 443 (1936)

- (23) H.A BETHE - L.C MAXIMON, Phy. Rev., 93, 768 (1954)
- (24) H.W KOCH - R.E CARTER, Phy. Rev., 77, 165 (1950)
- (25) H.W KOCH - J.W MOTZ, Rev. Mod. Phy., 31, 920 (1959).
- (26) W.R JOHNSON - C.J MULLIN, Phy. Rev., 119, 1270 (1960)
- (27) H.E HALL - A.O HANSON - D JAMNIK, Phy. Rev., 129, 2207 (1963)
- (28) R.P FEYNMAN, "Quantum Electrodynamics", Benjamin Inc., New-York (1961)
- (29) W HEITLER, "The Quantum Theory of Radiation", Clarendon Press (1954)
- (30) A MESSIAH, "Mécanique Quantique", Tome II, Dunod (1960)
- (31) E.G VEKSHTAIN, Soviet Phy. JETP, 20, 452 (1965)
- (32) K MORK - H OLSEN, Phy. Rev., 140, 1661 (1965)
- (33) L.M BROWN - R.P FEYNMAN, Phy. Rev., 85, 231 (1952)
- (34) L.I SCHIFF, Phy. Rev., 103, 443 (1956)
- (35) L BESS, Phy. Rev., 77, 550 (1950)
- (36) H DAVIES - H.A BETHE - L.C MAXIMON, Phy. Rev., 93, 788 (1954)
- (37) O CHAUMEIL, Thèse CNAM, Clermont-Ferrand (1963)
- (38) J.F HOUPIN, Thèse CNAM, Clermont-Ferrand (1963)
- (39) L. AVAN - P KELLER - G ROCHE, L'Onde Electrique, 446, 466 (1964)
- (40) G ROCHE - L AVAN - M PRADOUX - R CHABROLLES, C.R. Acad. Sc. Paris, 262, 831 (1966) ; 262, 911 (1966)
- (41) R CHABROLLES, Thèse D.I. n° 33, Faculté des Sciences de l'Université de Clermont-Ferrand (1966)
- (42) M PRADOUX, Thèse 3e cycle n° 84, Faculté des Sciences de l'Université de Clermont-Ferrand (1967)
- (43) Documentation : "Composants pour l'Instrumentation Nucléaire", La Radiotechnique, 130, av. Ledru-Rollin, Paris (11e)
- (44) H BLACHE, D.E.S., Faculté des Sciences de L'université de Clermont-Ferrand (1966)
- (45) G BELLETTINI - C BEMPORAD - C CERRI - L FOA, Nuc. Inst. Meth., 27, 38 (1964)
- (46) J.B LINDSAY, Nuc. Inst. Meth., 20, 345 (1963)

- (47) P SEN - A.P PATRO, Nuc. Inst. Meth., 40, 1 (1966)
- (48) H.E BOSCH - T URSTEIN, UCRL-8924 (1959)
- (49) J.C RASTOIX, D.E.S., Faculté des Sciences de L'université de Clermont-Ferrand (1966)
- (50) B.S DZHELEPOV - L.K PEKER, "Decay Schemes of Radioactive Nucléi", Pergamon Press (1961)
- (51) P KELLER, Thèse n° 161, Faculté des Sciences de l'Université de Strabourg (1958)
- (52) H MEUNIER, D.E.A. d'Electricité Corpusculaire (Rapport de stage), Faculté des Sciences de l'Université de Clermont-Ferrand (1967)
- (53) L LANDAU, J. Phy. USSR, 8, 201 (1944)
- (54) R.E RAND, Nuc. Inst. Meth., 17, 65 (1962)
- (55) O BLUNCK - S LEISEGANG, Z. Physik, 128, 500 (1950)
- (56) T.E CRANSHAW, Progress in Nuc. Phy., 2, 271 (1952)
- (57) E.L GOLDWASSER - F.E MILLS - A.O HANSON, Phy. Rev., 88, 1137 (1952)
- (58) J.A BEARDEN - A.F BURR, "Atomic Energy Levels", U.S. Atomic Energy Commission, Oak Ridge, Tennessee (1955)
- (59) MATHIS, D.E.A. d'Electricité Corpusculaire (Rapport de stage), Faculté des Sciences de l'Université de Clermont-Ferrand (1967)
- (60) F LACOSTE, L.A.L. 1029 (1962)
- (61) R.R ROY, Proc. Phy. Soc., A62, 499 (1949)
- (62) ALICHANOW - ALICHANIAN - KOSODAEW, Nature, 136, 475 (1935)
- (63) I.B Mc DIARMID, Can. Jour. Phy., 30, 670 (1952)
- (64) HOUGH, Phy. Rev., 73, 266 (1948)

ERRATA

- p. 4 ligne 25, lire ρ au lieu de p
- p. 9 formule (1.7), lire $-\frac{\omega_F|0}{v}$ au lieu de $\frac{\omega_F|0}{N}$
- Figure 1.3a et 1.3b lire p'' et p' respectivement, au lieu de p' et p''
- p. 38 ligne 2, lire : "de σ_{BH} et σ'_{BH} respectivement"
- p. 40 ligne 6, lire : σ_{BM}
- p. 43 ligne 11, lire : Dirac
- p. 56 fin ligne 29, il manque : La
- p. 58 ligne 8, lire : générateur
 ligne 21, lire : sélecteur multicanaux
- p. 61 ligne 1, lire : du "côté γ " :
- p. 65 ligne 17, lire : inférieure
- p. 66 ligne 3, lire : heure
- p. 75 ligne 14, lire : $g(T_j + \frac{\Delta T}{2})$
- p. 94 ligne 29, lire : 3. Section efficace totale

DEUXIEME THESE

"La Nucléosynthèse "

VU ET PERMIS D'IMPRIMER
(Décret n° 67-750 du 29 Août 1967)

Clermont-Fd, le 13 Février 1968

Le Doyen,

J. SAUREL

Imprimerie Faculté des Sciences

1er Trimestre 1968

